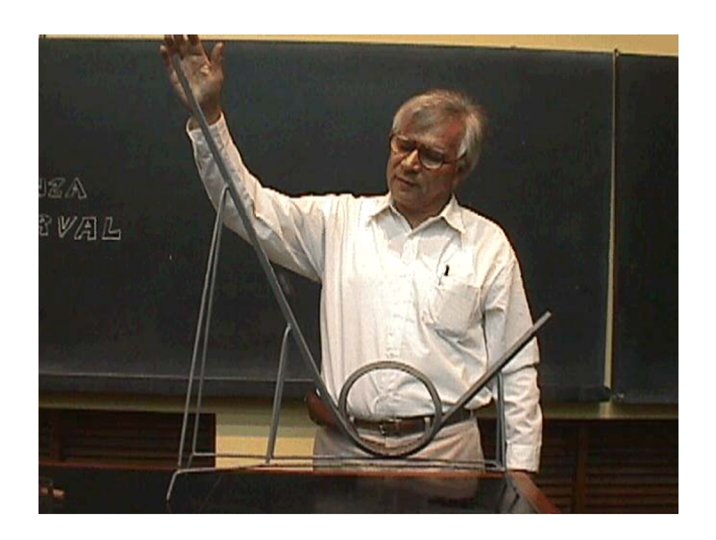
FISICA 1



Autor: Hugo Medina Guzmán
Profesor de la Pontificia Universidad Católica del Perú
Agosto 2009

PRESENTACIÓN

Me agradó saber que Hugo Medina Guzmán estaba por publicar un texto sobre Física. Había dos razones suficientes para este sentimiento. Por un lado, tenía curiosidad de saber lo que podría aportar un texto más de Física sobre los otros ya disponibles. Por otro lado, conozco de la larga carrera de Hugo Medina como cultor de la enseñanza de [a Física, y tenía curiosidad de ver cómo este compromiso como docente y experiencia se manifestarían en su texto. Tuve la suerte de conocer al Ing. José Castro Mendívil en su taller, donde desplegó una destacada labor en el diseño y construcción de equipo de laboratorio para la enseñanza de la Física. Considero que Hugo es un digno discípulo del Ing. Castro Mendívil e igualmente ha dedicado una fracción considerable de su tiempo a la docencia, y al diseño y construcción de equipo de laboratorio para resaltar los conceptos básicos de la Física.

He revisado el contenido de este texto y veo con gran satisfacción que su autor utiliza un enfoque muy acertado. Toma como punto de partida una observación experimental y a partir de allí desarrolla los conceptos físicos que permiten interpretar esta observación utilizando la formulación matemática más sencilla. Todo esto lo hace con el detalle suficiente de manera que el lector pueda seguir el argumento lógico con facilidad. Considero que éste es un gran aporte de este texto. Este enfoque contrasta con textos que enfatizan la formulación matemática y dejan al alumno huérfano de una orientación para aplicarla a una realidad física concreta.

El contenido de temas de la Física General que son desarrollados en este texto se ajusta al programa de estudios de la PUCP. El desarrollo de cada tema incluye ejemplos bien seleccionados que son desarrollados con un detalle muy esmerado. Al final de cada capítulo se incluye un conjunto de preguntas y problemas propuestos; se incluye las respuestas. Algunos problemas plantean configuraciones complejas pero que contienen ciertas propiedades de simetría que permiten su reducción a configuraciones sencillas. Al final del texto encontramos un listado de referencias bibliográficas a un buen número de textos de Física General que han servido de consulta al autor.

En general, considero que este texto constituye una representación gráfica de la obra cotidiana que Hugo ha venido desarrollando durante su carrera docente y, por lo tanto, es un aporte muy valioso para la comunidad académica y público en general.

Lima, julio de 2007

Jorge A. Bravo Cabrejos, Ph. D.
Profesor Principal
Facultad de Ciencias Físicas, U.N.M.S.M.

PRÓLOGO

Los estudiantes a menudo se preguntan por qué llevan un curso de Física. La mejor razón por la que se estudia Física es porque proporciona un método coherente y lógico para comprender el mundo que nos rodea; una persona que comprende lo que sucede a su alrededor, es capaz de convivir en su entorno de manera racional y efectiva. Sin embargo, en ocasiones los estudiantes ignoran el potencial que tiene la Física para explicar el entorno en términos fáciles de entender;

Este libro tiene por objeto brindar a los estudiantes de la Física General una ayuda para dominar los principios físicos que son la base de la tecnología moderna. En éste libro se asume que los estudiantes tienen una base de álgebra, geometría, y trigonometría. Es mucho más compacto que los libros de texto tradicionales, proporciona muchos ejemplos trabajados y pide resolver problemas

Este libro será útil también como texto para una persona que repasa o que consolida su conocimiento de la Física.

La discusión y las explicaciones narrativas son suficientemente claras y completas para poder utilizar el libro o como texto, o como suplemento a un texto más amplio.

La forma de aprender la física es trabajar realmente con problemas. Al usar este libro, el estudiante debe ser activo. Debe intentar trabajar cada uno de los problemas y los ejemplos. Debe mirar las soluciones solamente si no logra dar con el camino a su solución.

Los ejemplos en este libro están trabajados exhaustivamente, de modo que puedan servir como modelos para el propio trabajo de los estudiantes. En este sentido se considera que los estudiantes se benefician al observar los cálculos realizados en más de una manera, por lo que se han incluido varios métodos para efectuar los cálculos.

Además, se tuvo especial cuidado en incluir problemas y preguntas que combinan el material del capítulo en cuestión, con material de capítulos anteriores. Tales problemas y preguntas destacan el hecho importante de que diversas áreas de la Física se manifiestan de manera simultánea en el mundo real. Además, este método de temas múltiples proporciona una manera para que los estudiantes repasen lo estudiado y ayuda a mejorar la habilidad para resolver problemas.

El diseño gráfico es de gran importancia, y para mejorar su función se ha intentado enfocar solamente una idea principal en cada figura en lo posible. Por consiguiente, las figuras del libro a menudo se dividen en dos o más partes, para evitar la confusión de mezclar varias ideas en la misma figura.

Los profesores conocen la importancia de los diagramas de cuerpo libre cuando utilizan la segunda ley de movimiento de Newton, y todos los estudiantes aprenden de ellos a medida que estudian Física. Tales diagramas se utilizan en todo el libro, no solamente en los primeros capítulos en los que se presenta y aplica la segunda ley de Newton. Por ejemplo, cuando se analiza la relación en las oscilaciones, también entre la presión y profundidad en un fluido, el análisis se simplifica considerablemente por medio de un diagrama de cuerpo libre. De manera semejante, cuando se deduce la expresión para la rapidez de una onda transversal en una cuerda, un diagrama de cuerpo libre es muy útil.

Cifras significativas. A lo largo de todo el libro se siguen los procedimientos normales para las cifras significativas.

Se espera que el esfuerzo en la elaboración de este libro sea de utilidad tanto para los estudiantes como para los profesores. Toda opinión al respecto será bienvenida.

Hugo Medina Guzmán
Lima Perú

AGRADECIMIENTOS

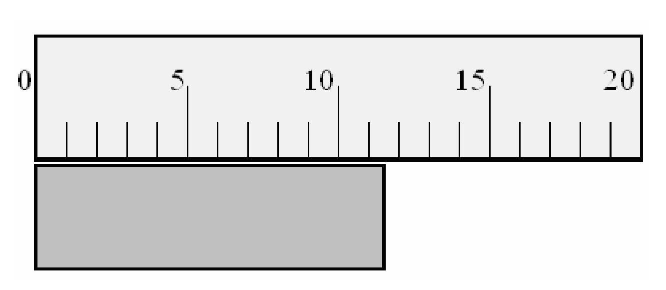
El autor agradece primeramente a los estudiantes, quienes han contribuido bastante en la elaboración de este libro a través de su influencia en el establecimiento de las técnicas y principios de enseñanza y a los profesores que con sus sugerencias y revisiones a las separatas de los capítulos hicieron notar puntos que necesitaban una mayor aclaración.

Hugo Medina Guzmán

CONTENIDO

CAPITULO 1

INTRODUCCIÓN AL CURSO



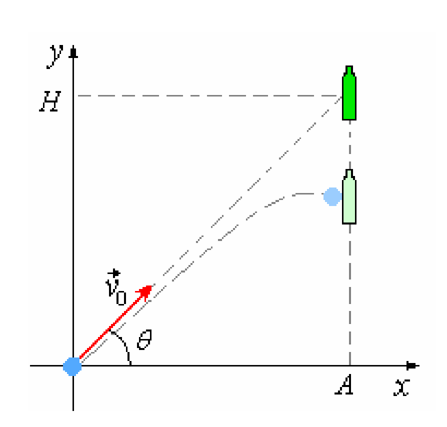
CAPITULO 2

Movimiento rectilíneo

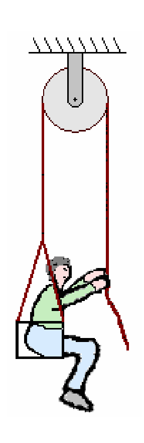


CAPITULO 3

Movimiento en un plano y en el espacio



CAPÍTULO 4



Dinámica de una partícula



CAPITULO 5

TRABAJO Y ENERGÍA

CAPÍTULO 6

SISTEMA DE PARTÍCULAS



CAPÍTULO 7

CUERPO RÍGIDO



.

BIBLIOGRAFÍA

THEORETICAL PHYSICS, Mechanics of particles, rigid and elastic bodies, fluids and heat flow. F: Woobridge Constant. Trinity College. Addison – Wesley Publishing Company (1959)
THEORETICAL PHYSICS,Thermodinamics, electromagnetism,waves, and particles. F: Woobridge Constant. Trinity College. Addison – Wesley Publishing Company (1959)
The Feynman LECTURES ON PHYSICS. Volumenes I, II y III. Richard P.Feynman, Robert B. Leighton. California Institute of Technology, Matthew Sands, Stanford University. Addison – Wesley Publishing Company (1964)
CORRIENTES, CAMPOS Y PARTÍCULAS. Francis Bitter. Massachussets Institute of Technology. Editorial Reverté S. A. (1964).
INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LA MECÁNICA, MATERIA Y ONDAS. Uno Ingard, William L. Kraushaar. Editorial Reverté. (1966).
FUNDAMENTOS DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Arthur F. Kip. University of California. Mc Graw – Hill Book Company (1967)
CIENCIA FÍSICA Orígenes y principios Robert T. Langeman, Universidad Vanderbilt. UTEHA, (1968)
PROBLEMS IN ELEMENTARY PHYSICS. B. Bukhotsev, V: Krivchenkov, G. Myakishev, V.Shalnov. Mir Publishers. Moscow (1971)
PROBLEMES DE PHYSIQUE COMMENTES. Tomos I y II Hubert Lumbroso. Mason et Cie, París. (1971)
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA. Luis L. Cantú. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Editorial Limusa Mexico (1973)
FÍSICA PARA LAS CIENCIAS DE LA VIDA Y LA SALUD. Simon G. G. MacDonald / Desmond M. Burns University of Dundee. Fondo educativo interamericano. (1975)
MECÁNICA NEWTONIANA, MIT Physics course. A. P. French. Editorial Reverté. (1974).
FÍSICA I y II. Solomon Gartenhaus. Purdue University. INTERAMERICANA. (1977)
TEACHING TIPS. A guidebook for the beginning College Teacher. Wilbert J. McKeachie (University of Michigan). Seventh edition D. C. Heath and Company (1978)
FÍSICA PARA LAS CIENCIAS DE LA VIDA. Alan H. Cromer. Northeastern University. Editorial Reverté. (1978)
GENERAL PHYSICS WITH BIOSCIENCE ESSAYS. Jerry B. Marion. University of Maryland. John Wiley & Sons Inc. (1979)
Física general II: Teoría Hugo Medina Guzmán, Miguel Piaggio H. QC 21 M19 (Biblioteca PUCP) (1979)
Física general II: Problemas resueltos Hugo Medina Guzmán, Miguel Piaggio H. FIS 111 M364 (Biblioteca PUCP) (1979)
Física general I: problemas resueltos Hugo Medina Guzmán, Miguel Piaggio H. FIS 104 M364 (Biblioteca PUCP) (1981)
FÍSICA PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA. 1 y 2. John P. McKelvey, Clemson University – Howard Grotch, Pennsilvania State University. HARLA. Mexico. (1981)
Física 3: electricidad y magnetismo para estudiantes de ciencias e ingeniería Hugo Medina Guzmán, FIS 141 M36 (Biblioteca PUCP) (1982)
EXPLORING PHYSICS Concepts and applications. Roger W. Redding North Texas State University, Stuart Kenter, Wadsworth Publishing Company (1984)
PROBLEMAS DE FISICA. J. Aguilar Peris, Universidad Complutense de Madrid - J. Casanova Colas, Facultad de Ciencias de Valladolid. Alambra (1985)
PROBLEMAS DE FISICA. dirigido por S. Kósel. Editorial Mir Moscú. (1986)
PROBLEMAS DE FISICA Y COMO RESOLVERLOS. Clarence E. Benett Maine University. CECSA (1986)
PHYSICS for Engineering and Science. Michael E. Browne, Ph. D. (professor of Physics University of Idaho. Schaum's outline series Mcgraw-Hill (1988)
FÍSICA: VOLUMEN 1. Mecánica, ondas y termodinámica. Duane E. Roller, Ronald Blum. Editorial Reverté. (1990).
FÍSICA: VOLUMEN 2. Electricidad, magnetismo y óptica. Duane E. Roller, Ronald Blum. Editorial Reverté. (1990).
PROBLEMAS DE FISICA. dirigido por O. Ya. Sávchenko. Editorial Mir Moscú. (1989)
MECÁNICA. Berkeley physics course – volumen 1. Charles Kittel, Walter D. Knight, Malvin A. Ruderman. Editorial Reverté SA. (1992).

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Berkeley physics course – volumen 2. Edward M.Purcell. Editorial Reverté SA. (1992).
FÍSICA. Tomos I y II Tercera edición revisada (Segunda edición en español), Raymond S: Serway, James Madison University, Mcgraw-Hill, (1993)
PROBLEMAS DE FISICA Santiago Burbano de Ercilla, enrique Burbano de Ercilla, Carlos Gracia Muñoz, XXVI edición, Zaragoza, MIRA editores (1994)
ONDAS. Berkeley physics course – volumen 3. Frank S. Crawford, Jr. Editorial Reverté SA. (1994).
FÍSICA Para las ciencias de la vida, David Jou Mirabent Universidad autónoma de Barcelona, Joseph Enric Llebot Rabagliati, Universidad de Girona, Carlos Pérez garcía, Universidad de Navarra. Mcgraw-Hill, (1994)
Física uno Hugo Medina Guzmán, FIS 104 M365 (Biblioteca PUCP) (1995)
APPLIED PHYSICS. Arthur Beiser, Ph. D. Schaum's outline series Mcgraw-Hill (1995)
TEACHING INTRODUCTORY PHISICS A Sourcebook. Clifford E: Swartz (State University of New York, Stony Brook) and Thomas Miner (Associate Editor The Physics Teacher 1972 – 1988). ATP Press – Springer. (1996)
TEACHING INTRODUCTORY PHYSICS Arnold Arons University of Washington JOHN WILEY & SONS, INC. (1997)
FÍSICA John Cutnell / Kenneth W. Johnson. Southern Illinois University. LIMUSA (1998)
FÍSICA EN LA CIENCIA Y EN LA INDUSTRIA. A . Cromer. Northeastern University. Editorial Reverté. (2000)
FÍSICA CONTEMPORANEA Edwin Jones.– Richard Childers, University of South Carolina. Mcgraw-Hill, (2001)
PROBLEMAS Y CUESTIONES DE FISICA. Atanasio Lleó, Begoña Betete, Javier Galeano, Lourdes Lleó, Ildefonso Ruiz – Tapiador. Universidad Politécnica de Madrid. Ediciones Mundi – prensa (2002)
The PHYSICS of every day phenomena. A conceptual introduction to Physics. W. Thomas Griffith, Pacific University. Mcgraw-Hill, (2004)
FÍSICA UNIVERSITARIA. Francis W.Sears, Mark W. Zemansky, Hugh D. Young (Carnegie Mellon University) y Roger A. Freedman (University of California. Santa Barbara) Volumen 1, Volumen 2. Undecima edición. Pearson - Addison Wesley (2004)
FIVE EASY LESSONS Strategies for successful Physics teaching. Randall D. Knight California Polytechnic State University, San Luis Obispo. Addison Wesley (2004)
FUNDAMENTALS OF PHYSICS. David Halliday (Univ. of Pittsburgh), Robert Resnick (Rensselaer Polytechnic Institute), Jearl Walker (Cleveland State Univ.). 7th Edition (2005)

Capitulo 1. INTRODUCCIÓN AL CURSO

¿QUE ES LA FÍSICA?

La física es una ciencia dedicada a la comprensión de los fenómenos naturales que ocurren en el universo. El objetivo principal del estudio científico es desarrollar teorías físicas basadas en leyes fundamentales que permitan predecir los resultados de algunos experimentos. Las leyes de la física tratan de describir los resultados de observaciones experimentales y de mediciones cuantitativas de los procesos naturales.

La física es la ciencia más simple porque estudia los sistemas más simples. La física es la base de todas las demás ciencias.

La relación entre la física y la ingeniería es más directa que la que existe entre la física y cualquier otra ciencia. En la ingeniería se trabaja con sistemas a los que se aplica inmediatamente los principios de la física. Cualquiera sea la rama de la ingeniería o de la ciencia a la que uno se dedique, va a encontrar a cada paso la aplicación de las nociones que aprendió en la física. Siempre se encontrarán útiles los conceptos específicos de la física, las técnicas que se emplean para resolver los problemas, la forma de pensar que se adquiere en el estudio de la física.

METODOLOGIA DE LA FISICA

La metodología que se usa tiene tres formas características.

La primera forma es el análisis de un sistema físico que se realiza en base a las propiedades de sistemas más sencillos, estos sistemas están relacionados de algún modo importante con el sistema original, pero poseen un número menor de factores en su comportamiento. Siendo estos más sencillos se pueden investigar hasta entender bien sus propiedades, una vez que se obtenga el conocimiento de cada sistema se puede hacer una reconstrucción hasta lograr entender las propiedades del sistema original.

La segunda forma parte del principio de que la física se fundamenta necesariamente en la experimentación. A veces la teoría sugiere el experimento, pero más frecuentemente un experimentador realiza el trabajo inicial en un área particular de la física y luego el físico teórico sintetiza los resultados de los experimentos y perfecciona el entendimiento de su significado.

La tercera se refiere al uso frecuente de las matemáticas. La física estudia las interacciones entre objetos. Los objetos interaccionan de acuerdo a ciertas leyes, sean estas conocidas o no. Como las leyes físicas son casi siempre cuantitativas, es esencial poder establecer relaciones lógicas cuantitativas al estudiar los sistemas físicos. Las reglas que gobiernan todas estas relaciones son objeto de las matemáticas. Por eso se dice que la matemática es el lenguaje de la física.

PARTES DE LA FISICA

Actualmente la física se divide en dos clases: Física Clásica y Física Moderna.

La física clásica se ocupa de los fenómenos y las leyes que se conocían hasta la final del siglo XIX. La física moderna se ocupa de los descubrimientos hechos desde entonces.

La física clásica se subdivide en cierto número de ramas que originalmente se consideraban autónomas: la mecánica, el electromagnetismo, la óptica, la acústica y la termodinámica.

La mecánica se ocupa del estudio del movimiento efectos físicos que pueden influir sobre este.

El electromagnetismo se ocupa del estudio de los fenómenos eléctricos y magnéticos y las relaciones entre ellos.

La óptica se ocupa de los efectos físicos que se asocian a la luz visible.

La acústica al estudio de los efectos físicos relacionados con los sonidos audibles.

La termodinámica se ocupa de la generación, el transporte y la disipación del calor.

Estas disciplinas que originalmente se desarrollaron independientemente, están enlazadas por medio de la mecánica y el electromagnetismo.

La física moderna se inició a fines del siglo XIX, con el descubrimiento de cierto número de fenómenos físicos que entraban en conflicto con algunos conceptos de la física clásica.

Básicamente, esas alteraciones conceptuales fueron de dos tipos. Una de ellas estableció el límite superior para las velocidades de las partículas a las que se aplicaban las leyes de la física clásica, esto se asocia a la Teoría de la Relatividad de Einstein. El segundo se puede considerar como el establecimiento de un límite inferior para las dimensiones lineales y de masa de los sistemas físicos, para los que son válidas las leyes clásicas, esto se asocia a la Teoría de la Mecánica Cuántica. Para poder comprender estas dos teorías modernas y los fenómenos de que se ocupan, es necesario estudiar primeramente las leyes de la física clásica.

MAGNITUDES FÍSICAS: ESCALARES Y VECTORES.

En la descripción y estudio de los fenómenos físicos se han desarrollado (y se desarrollan) conceptos abstractos muy especiales llamados magnitudes físicas. Estas magnitudes se definen por medio de un conjunto de operaciones experimentales que permiten obtener un número como medida de la magnitud en cualquier situación.

Esta definición comprende dos pasos esenciales:

1) La elección de una unidad de medida con múltiplos y submúltiplos y

2) un proceso para comparar la magnitud a medir con la unidad de medida y establecer un número (entero o fraccionario) como medida de la magnitud. Son ejemplos de magnitudes físicas: la longitud, el área, el volumen, el tiempo, la masa, la energía, la

temperatura, la fuerza, la potencia, la velocidad, la aceleración, etc.
Llamamos **magnitud física** a aquella propiedad de un cuerpo que puede ser medida. La masa, la longitud, la velocidad o la temperatura son todas **magnitudes físicas**. El aroma o la simpatía, puesto que no pueden medirse, **no son magnitudes físicas**. Las medidas de las magnitudes se realizan mediante las **unidades de medida**, establecidas por la Unión Internacional de Pesas y Medidas (UIPM), que forman el Sistema Internacional de unidades (S. I.), aunque existen otras unidades que se siguen usando por tradición (como el kilate, que se emplea para medir la masa de las piedras preciosas).

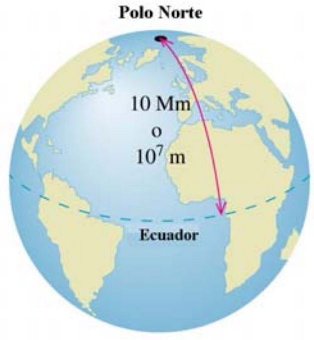
Magnitud escalar. Para muchas magnitudes físicas basta con indicar su valor para que estén perfectamente definidas. Así, por ejemplo, si decimos que José Antonio tiene una temperatura de 38 ºC, sabemos perfectamente que tiene fiebre y si Rosa mide 165 cm de altura y su masa es de 35 kg, está claro que es sumamente delgada. Cuando una magnitud queda definida por su valor recibe el nombre de magnitud escalar.

Magnitudes vectoriales. Otras magnitudes, con su valor numérico, no nos suministran toda la información. Si nos dicen que Daniel corría a 20 km/h apenas sabemos algo más que al principio. Deberían informarnos también desde dónde corría y hacia qué lugar se dirigía. Estas magnitudes que, además de su valor precisan una dirección se llaman magnitudes vectoriales, ya que se representan mediante **vectores**. En este tema estudiaremos los vectores y sus propiedades.

UNIDADES. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES.

MEDICIÓN. La física es una ciencia experimental. Los experimentos requieren mediciones cuyos resultados suelen describirse con números. Cualquier número empleado para describir cuantitativamente un fenómeno físico se denomina cantidad física. Dos cantidades físicas que describen a una persona son su peso y su altura. Algunas cantidades físicas son tan básicas que sólo podemos definirlas describiendo la forma de medirlas, es decir, con una definición operativa. Ejemplos de esto son medir una distancia con una regla, o un intervalo de tiempo con un cronómetro. En otros casos definimos una cantidad física describiendo la forma de calcularla a partir de otras cantidades *medibles.* Así, podríamos definir la velocidad media de un objeto como la distancia recorrida (medida con una regla) dividida por el tiempo de recorrido (medido con un cronómetro).

UNIDADES. Al medir una cantidad, siempre la comparamos con un estándar de referencia. Si decimos que un automóvil mide 4,29 m, queremos decir que es 4,29 veces más largo que una regla de medir, que por definición tiene 1m de largo. Este estándar define una unidad de la cantidad. El metro es una unidad de distancia, y el segundo, de tiempo. Al describir una cantidad física con un número, siempre debemos especificar la unidad empleada; describir una distancia como "4,29" no significa nada.
Las mediciones exactas y fiables exigen unidades inmutables que los observadores puedan duplicar en distintos lugares. El sistema de unidades empleado por los científicos e ingenieros se denomina comúnmente "sistema métrico", pero desde 1960 su nombre oficial es Sistema Internacional, o SI.
Las definiciones de las unidades básicas del sistema métrico han evolucionado con los años. Cuando la Academia Francesa de Ciencias estableció el sistema métrico en 1791, el metro se definió como una diezmillonésima parte de la distancia entre el Polo Norte y el Ecuador (ver figura). El segundo se definió como el tiempo que tarda un péndulo de 1m de largo en oscilar de un lado a otro. Estas definiciones eran poco prácticas y difíciles de duplicar con precisión, por lo que se han sustituido por otras más refinadas y por acuerdo internacional.



Unidades fundamentales
Las fuerzas, velocidades, presiones, energías, en realidad todas las propiedades mecánicas, pueden expresarse en términos de tres cantidades básicas: masa, longitud y tiempo. En el sistema SI, las unidades correspondientes son:

Masa	Kilogramo
Longitud	Metro
Tiempo	Segundo

Estas unidades se conocen como unidades fundamentales.

TIEMPO
Desde 1889 a 1967, la unidad de tiempo se definió como una cierta fracción del día solar medio (el tiempo medio entre llegadas sucesivas del Sol al cenit). El estándar actual, adoptado en 1967, es mucho más preciso; se basa en un reloj atómico que usa la diferencia de energía entre los dos estados energéticos más bajos del átomo de cesio. Cuando se bombardea con microondas de una determinada frecuencia, los átomos de cesio sufren una transición entre dichos estados. Se define un segundo como el tiempo requerido por 9 192 631 770 ciclos de esta radiación.

LONGITUD

En 1960 se estableció también un estándar atómico para el metro, usando la longitud de onda de la luz naranja emitida por átomos de kriptón (^{86}Kr) en un tubo de descarga de luz. En noviembre de 1983 el estándar se modificó de nuevo, esta vez de forma más radical. Se definió que la velocidad de la luz en el vacío es exactamente 299 792 458 m/s. Por definición, el metro es consecuente con este número y con la definición anterior del segundo. Así, la nueva definición de metro es la distancia que recorre la luz en el vacío en 1/299 792458 s. Éste es un estándar de longitud mucho más preciso que el basado en una longitud de onda de la luz.

MASA
El estándar de masa, el kilogramo, se define como la masa de un determinado cilindro de aleación platino-iridio que se guarda en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sevres, cerca de París. Un estándar atómico de masa, sería más fundamental, pero aún no podemos medir masas a escala atómica con tanta exactitud como a escala macroscópica.

Unidades derivadas
Las cantidades que interesan a los científicos no se limitan a masa, longitud y tiempo. A menudo el comportamiento de objetos se describe en términos de sus velocidades; hay que identificar las fuerzas que actúan sobre los cuerpos; se paga por la energía que consumen los aparatos domésticos y nos interesa la potencia que pueda desarrollar un motor; la presión atmosférica es un indicador útil de las condiciones del tiempo. Todas las anteriores propiedades, aparentemente dispares, que se miden en metros por segundo (velocidad), newton (fuerza), joules (energía), watts (potencia) y pascales (presión), finalmente se pueden expresar como productos de potencias de masa, longitud y tiempo. Esas unidades, por tanto, se conocen como unidades derivadas, para distinguirlas de las tres unidades fundamentales.

Prefijos comúnmente encontrados. Utilizamos con frecuencia prefijos para obtener unidades de un tamaño más conveniente. Ejemplos de prefijos comúnmente encontrados:
1 manómetro = 1 nm = 10^{-9} m (un poco más grande que el diámetro del átomo)
1 micrómetro = 1 μ m =10^{-6} m (una célula de sangre humana es aproximadamente de 7 μ m)
1 milímetro = 1 mm =10^{-3} m (el carbón del lápiz es aproximadamente de 0,5 milímetros en diámetro)
1 centímetro = 1 cm =10^{-2} m (el diámetro de un bolígrafo)
1 kilómetro = 1 km = (1000 m)

1 microgramo = 1 μ g =10^{-6} g = 1^{-9} kg (masa de una partícula pequeña de polvo)
1 miligramo = 1 mg = 10^{-3} g = 10^{-6} kg (una gota de agua es aproximadamente 2 mg)
1 gramo = l g = 10^{-3} kg (la masa de un clip para papel es de aproximadamente 1 g)

1 nanosegundo = 1 ns =10^{-9} s (tiempo en el que la luz viaja 30 m)
1 microsegundo = 1 μ s = 10^{-6} s (tiempo en el que una bala del rifle viaja 1 μ m)
1 milisegundo = 1 ms = 10^{-3} s (cerca de 14 ms entre los latidos del corazón)

CONVERSION DE UNIDADES
Algunas veces encontramos los datos dados en unidades distintas al sistema SI. En este caso debemos convertir las unidades al sistema SI usando los factores conocidos de conversión.
La tabla siguiente muestra tales factores.

Factores de Conversión
Longitud
1 pulgada (in) = 2,54 centímetros (cm)
1 pie (ft) = 0,3048 metro (m)
1 milla (mi) = 5280 ft = 1,609 kilómetros (km)
1 m = 3,281 ft
1 km= 0,6214mi
1 ángstrom $\left(\overset{\circ}{A}\right)$ = 10^{-10} m
1 año luz = 9,461 x 10^{15} m
1 unidad astronómica (AU) = 1,496 x 10^{11}m
1 pársec (pc) 3,09 x 10^{16} m
Masa
1 slug = 14,59 kilogramos (kg)
1 kg = 1000 gramos = 6,852 x 10^{-2} slug
1 unidad de masa atómica (amu) = 1,6605 x 10^{-27} kg
(1 kg tiene un peso de 2,205 lb donde la aceleración de la gravedad es 32,174 ft/s^2)
Tiempo
1 dia =24 h= 1,44 x 10^3 min = 8,64 x 10^4 s
1 año = 365,24 días = 3,156 x 10^7s
1 hora (h) =60min =3600s
Velocidad
1 mi/h = 1,609 km/h = 1,467 ft/s 0,4470 m/s
1 km/h = 0,6214 mi/h = 0.2778 m/s 0,9113 ft/s
Volumen
1 litro (L) = 10 m^3 = 1000 cm^3 = 0,353 1 ft^3
1 ft^3 = 0,02832 m^3 = 7,481 U.S. galones (gal)
1 U.S. gal = 3,785 x 10 m^3 = 0,1337 ft^3
Fuerza
1 pound (lb) = 4,448 Newton (N)
1 N = 10 Dinas = 0,2248 lb
Trabajo y Energía
1 joule (J) = 0,7376 ft.lb = 10^7 ergios
1 kilogramo-caloría (kcal) = 4186 J
1 Btu (60°F) = 1055 J
1 kilowatt-hora (kWh) = 3,600 x 10^6 J
1 electron volt (eV) = 1,602 x 10^{-19} J
Angulo
1 radian (rad) = 57,30°
1° = 0,0 1745 rad
Presión
1 pascal (Pa) 1 N/m^2 = 1,450 x 10^4 lb/in^2
1 lb/in^2 = 6.895 x 10^{-5} Pa

l atmósfera (atm)= 1,013 x 10 Pa= 1,013 bar = 14,70 lb/in^2 = 760 torr

Potencia

1 horsepower (hp) = 550 ft.lb/s = 745,7 W

1 watt (W) = 0,7376 ft.lb/s

ANALISIS DIMENSIONAL

La especificación numérica de una cantidad física depende de las unidades que se empleen. Por ejemplo, aunque una distancia se mida en unidades de metros o pies o millas siempre será una distancia. Se dice que su dimensión es de longitud, la denominación no depende del sistema de unidades empleado.

Los símbolos usados para especificar la 1ongitud, la masa y el tiempo son L, M y T, respectivamente.

Para denotar las dimensiones de una cantidad se usan corchetes, por ejemplo de distancia $[\ell]$ = L, de velocidad $[v]$ = L/T, de área $[A]$ = L^2.

Entre sus aplicaciones tenemos:

a) Verificación de una fórmula específica. El análisis dimensional utiliza el hecho de que las dimensiones se pueden tratar como cantidades algebraicas (se pueden sumar y restar sólo si se tienen las mismas dimensiones).

Si una ecuación se lee

A = B + C

Los términos A, B, y C deben tener las mismas dimensiones.

Ejemplo 1. Verificar la fórmula siguiente

$x = x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$, donde x y x_0 representan distancias, v es velocidad, a es aceleración y t es un intervalo de tiempo.

Solución.

Como

$$[x] = [x_0] + [vt] + \left[\frac{1}{2}at^2\right] = \mathrm{L}$$

Y las dimensiones de la velocidad son L/T y de la aceleración L/T^2, tenemos:

$$[vt] = \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}\right)(\mathrm{T}) = \mathrm{L}$$

$$\left[\frac{1}{2}at^2\right] = \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}\right)(\mathrm{T}^2) = \mathrm{L}$$

Podemos ver que esta fórmula es correcta porque todos los términos tienen la dimensión de longitud.

b) Desarrollo de ecuaciones. Esto lo podemos ver en el ejemplo de encontrar la distancia recorrida por un cuerpo en caída libre.

Pongamos que esta caída puede depender de la masa, la aceleración de la gravedad y del tiempo.

$$x = f(m, g, t)$$

El procedimiento para el análisis dimensional es poner la expresión en la forma

$$x \propto m^a g^b t^c$$

Donde a, b y c son exponentes que deben ser determinados y el símbolo $\propto$ indica proporcionalidad. Esta ecuación es correcta únicamente si las dimensiones de ambos lados son iguales, como la dimensión de x es de longitud, la dimensión, del lado izquierdo también debe ser de longitud.

$$[m^a g^b t^c] = \mathrm{L}$$

$$\mathrm{M}^a \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}\right)^b \mathrm{T}^c = \mathrm{L}$$

$$\mathrm{M}^a \mathrm{L}^b \mathrm{T}^{c-2b} = \mathrm{L}$$

Igualando exponentes en ambos miembros obtendremos

a = 0, b =1, c-2b = 0

De aquí a = 0, b = 1 y c = 2

Por lo tanto la expresión debe tener la forma

$x \propto gt^2$ o $x = kgt^2$

El análisis dimensional puede describir la forma de la ecuación pero no indica el valor de la constante k.

Ejemplo 2. Mediante el análisis dimensional determinar la expresión para la aceleración centrípeta de una partícula que describe un movimiento circular uniforme.

Solución.

Supongamos que la aceleración centrípeta depende de la velocidad, del radio de curvatura y el peso

$$a_c = kv^a R^b W^c$$

aceleración centrípeta $[a_c] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}$

velocidad $[v] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}$

radio $[v] = \mathrm{L}$

peso $[W] = \frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}^2}$

Reemplazando

$$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2} = \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}\right)^a (\mathrm{L})^b \left(\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}^2}\right)^c$$

$$\Rightarrow \mathrm{LT}^{-2} = \mathrm{L}^{a+b+c}\mathrm{T}^{-a-2c}\mathrm{M}^c$$

Igualando exponentes para L: $1 = a + b + c$

para T: $-2 = -a - 2c$

para M: $0 = c$

de donde obtenemos $a = 2$, $b = -1$ y $c = 0$

por lo tanto

$$a_c = kv^2R^{-1} = k\frac{v^2}{R}$$

c) Convertir un sistema de unidades a otro. Si tenemos una fórmula en un sistema de unidades podemos convertirlo a una fórmula en otro sistema de unidades. Sean L_1, M_1, T_1 y L_2, M_2, T_2 sus unidades.

Si la cantidad G de una ecuación tiene dimensiones $G = L^a M^b T^c$. Se mide g_1 con la unidad G_1, y mide g_2 con la unidad G_2, la relación es:

$$g_1 G_1 = g_2 G_2 \Rightarrow g_2 = g_1 \frac{G_1}{G_2}$$

$$g_2 = g_1 \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^a \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^b \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^c$$

Ejemplo 3. Si en el sistema MKS la fórmula para el cálculo de la variable R de unidades kg/ms aparece

como $R = \left(\frac{5p}{1{,}782A + p}\right)^{\frac{1}{2}}$

Donde. p tiene unidades de m/s y A de km/m^3.
Hallar la fórmula en el Sistema Inglés.
1 kg = 2,2 1b 1 m = 3,28 pie

Solución.
Sean en el sistema MKS, L_1, M_1, T_1, y en el sistema Inglés, L_2, M_2, T_2.
Las relaciones entre estos sistemas son;

$$\frac{M_1}{M_2} = 2{,}2\,,\quad \frac{L_1}{L_2} = 3{,}28\,,\quad \frac{T_1}{T_2} = 1$$

En la ecuación $R = \left(\frac{5p}{1{,}782A + p}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$[R] = \frac{M}{LT}\,,\ [p] = \frac{L}{T}\,,\ [A] = \frac{M}{L^3}$$

La cantidad l,782 A tiene las mismas unidades que p

$$[1{,}782\ A] = [1{,}782][A] = [1{,}782\ ]\frac{M}{L^3} = \frac{L}{T}$$

Las unidades de 1,782 son

$$[1{,}782\ ] = \frac{L^4}{MT}$$

Observando la ecuación de R, concluimos que las unidades de 5 son las correspondientes a $(R)^2$.

$$[5\ ] = \frac{M^2}{L^2T^2}$$

Para obtener el valor correspondiente a 1,7132 en el sistema Inglés

$$g_1 \frac{L_1^4}{M_1T_1} = g_2 \frac{L_2^4}{M_2T_2} \Rightarrow g_2 = g_1 \frac{\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^4}{\left(\frac{M_1}{M_2}\right)\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}$$

$$\Rightarrow g_2 = 1{,}7132 \frac{(3{,}28)^4}{(2{,}2)(1)} = 95{,}75$$

Para obtener el valor correspondiente a 5 en el sistema Inglés

$$g_1 \frac{M_1^2}{L_1^2T_1^2} = g_2 \frac{M_2^2}{L_2^2T_2^2}$$

$$\Rightarrow g_2 = g_1 \frac{\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2}{\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow g_2 = 5 \frac{(2{,}2)^2}{(3{,}28)^2(1)^2} = 2{,}25$$

Luego en el Sistema Inglés la ecuación correspondiente es

$$R = \left(\frac{2{,}25p}{95{,}75A + p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Para comprobar esta expresión evaluemos

R_1 para $p_1 = 1\frac{m}{s}$, $A_1 = 1\frac{kg}{m^3}$ y R_2 para

$p_2 = 3{,}28\frac{pie}{s}$,

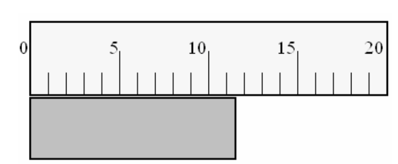
$$A_2 = \frac{2{,}2\ lb}{(3{,}28\ pie)^3} = 6{,}23\times10^{-2}\ \frac{lb}{pie^3}$$

Operando en las ecuaciones respectivas obtenemos

$$R_1 = 1{,}34\frac{kg}{m.s} \text{ y } R_2 = 0{,}899\frac{lb}{pie.s}$$

Realizando la conversión de unidades R_1 encontramos que es equivalente a R_2.

CIFRAS SIGNIFICATIVAS
Cuando e realizan mediciones, los valores medidos se conocen únicamente dentro de los límites de la incertidumbre experimental, 1o datos medidos inherentemente no son exactos y si se registran en notación decimal consisten de un conjunto finito de dígitos llamados cifras significativas, la última de las cuales es conocida como cifra dudosa.
Cuando se mide una longitud mediante una regla se observa la lectura de un instrumento en el cual hay una escala, el punto de observación para la lectura llega a una posición como la que se indica en la figura siguiente.



Se puede leer exactamente hasta 11 y apreciar un dígito más, este último depende de cada persona puede ser 11,6 , 11,5 ó 11,7.
Si suponemos que nuestros instrumentos están adecuadamente construidos, entonces las lecturas que tomemos tendrán significado y serán reproducibles, excepto el último digito, el de los décimos de la

división más pequeña, será aunque con significado un poco incierto.
Por lo que no hay objeto en añadir una segunda cifra incierta. Una cifra significativa es cualquier dígito que denota la magnitud de la cantidad según el lugar que ocupa en un número. Por ejemplo si escribimos S/. 10,52, todas las cifras son significativas, el uno representa el número de decenas en soles, el 0 representa que no hay unidad de sol y es significativo y finalmente sabemos que tenemos 52 céntimos. En la expresión 0,01052 gr. el primer cero de la izquierda sirve para llamar la atención hacia la coma, el segundo cero muestra que el 1 ocupa el segundo lugar después de la coma. Estos ceros no son significativos, sin embargo el 0 entre 1 y 5 es significativo.
10,52 tiene cuatro cifras significativas (1, 0, 5 y 2)
0,01052 tiene cuatro cifras significativas (1, 0, 5 y 2)
La incertidumbre más pequeña posible con cualquier aparato de medición es mitad del límite de la lectura. Sin embargo, la mayoría de las investigaciones generan una incertidumbre mayor que esto. La tabla siguiente enumera la incertidumbre de algunos equipos comunes del laboratorio.

Regla de metro	± 0,05 cm
Calibrador vernier	± 0,005 cm
Micrómetro	± 0,005 mm
Reloj de segundos	± 0,5 s
Cronómetro	± 0,0005 s
Dinamómetro	± 0,1 N

Cuando se anotan y se manipulan números obtenidos por medidas, serán de mucha ayuda las siguientes reglas:

Regla 1: Redondeo de un número -
En el proceso de rechazo de uno o varios de los últimos dígitos. La última cifra retenida se incrementará en 1 si la cifra rechazada es 5 o mayor.
Ejemplo.

Número dado	**Redondeo a**		
	Cuatro cifras	**Tres cifras**	**Dos cifras**
62,578	62,58	62,6	63
10 232	10 230	10 200	10 000
329 350	329 400	329 000	330 000

Regla 2: Suma y Resta
El número de cifras significativas de la suma o diferencia será redondeado desechando todas las cifras a la derecha del lugar ocupado por la cifra incierta en cualquiera de las cantidades que esté más hacia la izquierda, como se muestra en el ejemplo:

201,3 1,05 21,76 0,0013 224,1113 = 224,1	201,3 - 1,05 - 21,76 - 0,0013 178,4887 = 178,5

Regla 3: Multiplicación y División
El número de cifras significativas del producto cociente será redondeado a un número de Significativas igual a aquel componente de aproximación como se muestra en los ejemplos:
3,14159 x 21,13 = 66,38179 = 66,38
3,14159 / 21,13 = 0,14868 = 0,1487
Esto es porque 21,13 tiene sólo cuatro cifras significativas, el resultado se redondea a cuatro cifras significativas

Regla 4. Potencias y raíces
La potencia o raíz de un número de *n* cifras significativas se redondea a *n* cifras significativas. como se muestra en los ejemplos:

$2,14^2 = 4,5796 = 4,58$ $\quad 2,14^3 = 9,800344 = 9,80$

$\sqrt{2,14} = 1,46287 = 1,46$ $\quad \sqrt[3]{2,14} = 1,288658 = 1,29$

Ejemplo 4. ¿Cuáles son los resultados en las cifras correctas de las siguientes operaciones indicadas?
a) $2,5 \times 10^{-2} \times 20$
b) $3,32 \times 10^3 + 3,2 \times 10$
c) $4,52 \times 10^8 + - 4,2 \times 10^3$
d) $2,801 \times 4 \times 10^{-3}$
e) $6,2 \times 10^4 / 3,0 \times 10$
Solución.
Aquí todos los números están expresados en notación científica.
Por ejemplo:
$0,025 = 2,5 \times 10^{-2} = 2,5(-02)$, tiene 2 cifras significativas
20 = 2 x 10 = 2(+1), tiene una cifra significativa.

a) $2,5 \times 10^{-2} \times 20 = 5 \times 10^{-1}$
b) $3,32 \times 10^3 + 3,2 \times 10 = 3,35 \times 10^3$
c) $4,52 \times 10^8 - 4,2 \times 10^3 = 4,52 \times 10^8$
d) $2,801 \times 4 \times 10^{-3} = 11 \times 10^{-3}$
e) $6,2 \times 10^4 / 3,0 \times 10 = 2,1 \times 10^3$

Ejemplo 5. Para determinar la densidad de un líquido se toman 10 cm^3 de éste. La masa del líquido medida en una balanza es 15,38g. ¿Cuál es la expresión correcta de la densidad?
Solución.
La densidad del líquido es

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{15,38}{10} = 1,538 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Siendo 10 el número con menos cifras significativas (2), el resultado se redondea a 2 cifras significativas.
La expresión correcta de la densidad es

$$\rho = 1,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

ERRORES
Como hemos indicado las mediciones físicas involucran incertidumbre. El valor exacto de una magnitud medida es algo a lo cual intentamos aproximarnos pero que nunca conocemos. Un número de lecturas cuando se promedia se considera como el

mejor acercamiento al verdadero valor de una lectura, y la diferencia entre una lectura y la verdadera lectura o lectura exacta se llama error. Aquí la palabra error no significa equivocación sino una incertidumbre.

Error absoluto es la diferencia entre el valor aceptado N (asumimos conocido) y el valor aproximado $\overline{N}$, obtenido por mediciones o cálculos.

$$e = N - \overline{N}$$

Error relativo es la relación entre el error absoluto e y el valor aceptado N

$$\overline{e} = \frac{e}{N} = 1 - \frac{\overline{N}}{N}$$

Porcentaje de error es el número de partes por cada 100 en que un número está errado

$$e\% = (100e)\% = \left(1 - \frac{\overline{N}}{N}\right)\%$$

Cuando calcule el porcentaje de error en física elemental no use más de dos cifras significativas.
Por ejemplo si una pista para carreras de 3500 metros tiene 17 metros más.
El error absoluto o simplemente error es

$$e = 17 \text{ m}$$

El error relativo es

$$\overline{e} = \frac{17}{3500}$$

El porcentaje de error es

$$e\% = \frac{17}{3500} \times 100\% = 0{,}49\%$$

Clasificación de errores.

En los cálculos numéricos pueden ocurrir cinco tipos de errores básicos.

a) Error inherente (e_i). Es el error en los datos iniciales debido a mediciones, observaciones o registros inexactos.

b) Error de truncado e_t. Es el error creado por representar una función con sólo unos cuantos términos de una serie. Por ejemplo:

El valor correcto de $N = \text{sen}\frac{\pi}{2} = 1{,}000$

El valor aproximado de $\overline{N}$ computado por expansión de series es:

$$\overline{N} = \frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^7}{7!} \ldots$$

Si se usa solo el primer término.

$$e_t = N - \overline{N} = 1{,}00000 - \frac{\pi}{2} = -0{,}57080 \quad (-57\%)$$

Si se usan los dos primeros términos.

$$e_t = N - \overline{N} = 1{,}00000 - \frac{\pi}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} = +0{,}07516$$

(+7,5%)
Si se usan los tres primeros términos.

$$e_t = N - \overline{N} = 1{,}00000 - \frac{\pi}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!}$$

= -0,00453 (-0,5%)
Si se usan los cuatro primeros términos.

$e_t = 0{,}00015$, el error de truncado ya es insignificante.

c) Error de redondeo (e_r), es el error introducido por redondeo de un decimal. Por ejemplo.
Si π = 3,14159
Si redondeamos a π = 3,14, entonces:

$e_r = 3{,}14159 - 3{,}14 = 0{,}00159$ y

$$e_r = \frac{0{,}00159}{3{,}14159} \times 100 = 0{,}05\%$$

d) Error de interpolación (e_p), es el error introducido por la aproximación de un valor por su equivalente interpolado. Por ejemplo:
Si conocemos la circunferencia de un círculo de l0 metros de diámetro y de otro circulo de 11 metros.

$C_{10} = 10\pi = 31{,}42$ m y

$$C_{11} = 11\pi = 34{,}56 \text{ m}$$

Por interpolación lineal la circunferencia de un círculo de 10,6 metros es:

$$C_{10,6} = C_{10} + (C_{11} - C_{10}) \times 0{,}6 = 33{,}30 \text{ m}$$

Pero el valor exacto es

$$C_{10,6} = 10{,}6 \times \pi = 33{,}31 \text{ m}$$

De aquí

$$e_p = 33{,}31 - 33{,}30 = 0{,}01 \text{ m}$$

o $e_p\% = \dfrac{0{,}01}{33{,}31} \times 100 = 0{,}03\%$

e) Error de aproximación (e_a), es el error introducido por la aproximación de una constante o una función por un valor elegido. Por ejemplo:
La aceleración debido a la gravedad *g* = 9,80665 m/s^2 puede aproximarse por:

$$g = \frac{51}{52} \times 10 = 9{,}80769 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow e_a\% = 0{,}01\%$$

mejor por

$$g = \frac{507}{517} \times 10 = 9{,}80658 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow$$

$$e_a\% = 0{,}00\%$$

(El error aparece en el cuarto decimal)

Error cuadrático medio o **desviación normal** o **estándar**
En general cuando se realiza una medición cualquiera siempre se comete error, cuando repetimos las mediciones varias veces, encontramos casi siempre resultados diferentes para cada una, aunque empleemos el mismo método y el mismo aparato. Las mediciones sucesivas de un objeto determinado presentan discrepancias debido a los errores al azar o aleatorios de las medidas. Si la longitud verdadera de una varilla es ℓ_0 la media aritmética de un gran número de medidas sucesivas será un número que representa la longitud media ℓ_m. Una medida Individual cualquiera tendrá una desviación de la media $e = \ell - \ell_m$, cantidad que puede ser positiva o negativa según ℓ sea mayor o menor que ℓ_m, es decir

$$\ell = \ell_m \pm e$$

Si elevamos al cuadrado cada uno de los valores de e y tomamos la media de todos los e^2, obtenemos e_m^2 que es la **varianza** de las medidas.

$$e_m^2 = \frac{\sum_{1=1}^{n} e_i^2}{n}$$

A la raíz cuadrada de esta media se la conoce como el **error cuadrático medio** o **desviación normal** o **estándar** σ.

$$\sigma = \sqrt{e_m^2}$$

Cuanto mayor sea el número *n* de medidas, menor será la diferencia entre su media ℓ_m y la longitud verdadera ℓ_0, es decir el error estándar de la media, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, será menor. Por esto el mejor valor estimado de ℓ_0 es:

$$\ell = \ell_m \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \ell_m \pm \Delta\ell$$

En donde $\Delta\ell$ es la incertidumbre o error absoluto determinado a partir de *n* mediciones. En el caso de verdaderos errores aleatorios, la media ℓ_m cae en un 68 por ciento de las veces dentro de una distancia $\Delta\ell$ del valor verdadero pero desconocido ℓ_0.

De esta forma podemos presentar el resultado final de un experimento en el cual se mide varias veces una magnitud. Sin embargo, muchas veces realizamos sólo una medición de la magnitud. En este caso se considera generalmente que la incertidumbre o error absoluto es igual a la mitad de la división menor de la escala del instrumento. Por ejemplo: si para medir longitudes se usa una regla cuya división minina es 1 mm el error absoluto o incertidumbre de la medida es $\Delta\ell$ = 0,05 mm.

Ejemplo 6. Un estudiante realiza varias mediciones de la masa de un cuerpo, obteniendo los siguientes resultados: 35,73 g , 35,76 g , 35,80 g, 35,76 g, 35,70 g
¿Cuál es el mejor valor estimado de la masa del cuerpo?
Solución.
La masa media es:

$$m_m = \frac{35{,}73 + 35{,}76 + 35{,}80 + 35{,}76 + 35{,}70}{5}$$

$$= 35{,}75 \text{ g}$$

La desviación de la media de cada medición es:

$$m_1 - m_m = 35{,}73 - 35{,}75 = -0{,}02$$
$$m_2 - m_m = 35{,}76 - 35{,}75 = 0{,}01$$
$$m_3 - m_m = 35{,}80 - 35{,}75 = 0{,}05$$
$$m_4 - m_m = 35{,}76 - 35{,}75 = 0{,}01$$
$$m_5 - m_m = 35{,}70 - 35{,}75 = \text{-}\,0{,}05$$

La varianza de las medidas es:

$$e_m^2 = \frac{(-0{,}02)^2 + (0{,}01)^2 + (0{,}05)^2 + (0{,}01)^2 + (-0{,}05)^2}{5}$$

$$= 0{,}0112$$

La desviación normal

$$\sigma = \sqrt{e_m^2} = \sqrt{0{,}0112} = 0{,}0334$$

La incertidumbre o error estándar de la medida es:

$$\Delta m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}0334}{\sqrt{5}} = 0{,}01496 = 0{,}02$$

El mejor valor estimado es:

$$m = m_m \pm \Delta m = 35{,}75 \pm 0{,}02$$
$$m = (35{,}75 \pm 0{,}02)\text{g}$$

Si hubiéramos realizado una sola medición con una balanza cuya menor división es de 0,1 g la incertidumbre seria 0,05 y el resultado de la medición podría expresarse así:

$$m = (35{,}75 \pm 0{,}05)\text{g}$$

Observemos que en ambos casos la incertidumbre corresponde al segundo orden decimal (0,02 y 0,05 respectivamente) incidiendo por lo tanto en la cifra 5, que es la cifra dudosa.

PROPAGACIÓN ERRORES
La determinación experimental de algunas cantidades físicas tales como densidad o volumen se obtienen por medición directa. Generalmente, la cantidad a determinar se re1aciona de alguna manera conocida a una o más cantidades medibles. El procedimiento es medir estas cantidades y con estas calcular por medio de relaciones conocidas la cantidad original. Por ejemplo el volumen de un cilindro puede conocerse si tenemos su longitud y Su diámetro. Estas pueden medirse directamente, cada una con su intervalo de

error asociada, Estos intervalos de error determinan el Intervalo de error de la cantidad calculada. Es importante saber como hacer esta determinación de la propagación de errores.
A continuación determinemos los errores para diferentes situaciones.

a) Suma de dos o más variables.

Consideremos $z = x + y$.

$$z \pm \Delta z = (x \pm \Delta x) + (y \pm \Delta y)$$

Puesto que *x* e *y* tienen las incertidumbres Δx y Δy, ¿cuál es la incertidumbre Δz en *z*?

Los mayores valores posibles para *x* e *y* son $x + \Delta x$ e $y + \Delta y$, respectivamente, dando un valor superior de $\Delta z = \Delta x + \Delta y$.

Los menores valores posibles para *x* e *y* son $x - \Delta x$ e $y - \Delta y$, respectivamente, dando un valor inferior de $\Delta z = -(\Delta x + \Delta y)$.

Es decir, los valores límites para *z* son

$$z = (x + y) \pm (\Delta x + \Delta y)$$

Sin embargo, no utilizamos los $(\Delta x + \Delta y)$ como la incertidumbre.
La razón es que para que *z* realmente valga $z = (x + y) \pm (\Delta x + \Delta y)$ se necesita que la incertidumbre en la medición, tanto de *x* como de *y*, sea tal que los dos resultados experimentales sean subestimaciones.
Más probable es que uno de los resultados sea un poco bajo y el otro un poco alto. Si éste es el caso, la incertidumbre en una de las mediciones puede compensar, en parte, la incertidumbre en la otra.
Para tomar en cuenta esta posibilidad, lo que hacemos no es sumar las incertidumbres, sino que calculamos

$$\Delta z = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Esta manera de combinar las incertidumbres, sumándolas elevadas al cuadrado, se llama suma en cuadratura.
La incertidumbre Δz calculada de esta manera es siempre mayor que las a Δx y Δy por separado, pero menor que la suma $\Delta x + \Delta y$. La diferencia entre simplemente sumar las incertidumbres y sumarlas en cuadratura es que la suma simple da la incertidumbre máxima en el resultado, mientras que la suma en cuadratura da la incertidumbre más probable.

b) Diferencia de dos variables

Consideremos $z = x - y$.

$$z \pm \Delta z = (x \pm \Delta x) - (y \pm \Delta y)$$

La incertidumbre que queremos es la incertidumbre más probable, que viene a ser la raíz cuadrada de la suma en cuadratura de las incertidumbres

$$\Delta z = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Por lo tanto, tenemos una regla para la propagación de incertidumbres Cuando sumamos o restamos dos magnitudes la incertidumbre en el resultado es la raíz cuadrada de la suma en cuadratura de las incertidumbres en las magnitudes.

Ejemplo 7. Medimos la masa de un tomillo y obtenemos $m_1 \pm \Delta m_1 = (253 \pm 5)\,\text{g}$, luego medimos también la masa de una tuerca, $m_2 \pm \Delta m_2 = (48 \pm 5)\,\text{g}$. ¿Cuánto vale la masa *M* del tornillo y la tuerca juntos?

Solución.

Evidentemente, la masa *M* es

$$M = m_1 + m_2 == 253 + 48 = 301\,\text{g}$$

La Incertidumbre en la suma es

$$\Delta M^2 = \sqrt{\Delta m_1^2 + \Delta m_2^2} = \sqrt{50} = 7\ \text{g}$$

y el resultado final es

$$M = (301 \pm 7)\,\text{g}$$

Ejemplo 8. ¿Cuál es la diferencia *M'* entre las masas m_1 y m_2 del tornillo y la tuerca respectivamente?

Solución.

Evidentemente, la masa *M'* es

$$M' = m_1 - m_2 == 253 - 48 = 205\,\text{g}$$

La Incertidumbre en la diferencia también es

$$\Delta M'^2 = \sqrt{\Delta m_1^2 + \Delta m_2^2} = \sqrt{50} = 7\ \text{g}$$

y el resultado final es

$$M' = (205 \pm 7)\,\text{g}$$

c) Producto de dos o más variables.

Supongamos $z = xy$

$$z \pm \Delta z = (x \pm \Delta x)(y \pm \Delta y)$$
$$= xy \pm y\Delta x \pm x\Delta y + \Delta x \Delta y$$

el error de z es $\Delta z = y\Delta x + x\Delta y$

considerando el mayor valor posible y no tomando en cuenta $\Delta x \Delta y$ por se el producto de dos cantidades pequeñas.
El significado de esto se más claramente en el error relativo.

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{y\Delta x + x\Delta y}{xy} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

Ejemplo 9. ¿Cuál es el producto de $(2{,}6 \pm 0{,}5)$ cm y $(2{,}8 \pm 0{,}5)$ cm?

Solución.

Primero, determinamos el producto de 2,6cm x 2,8cm = 7,28 cm^2

Error relativo 1 = $\dfrac{0{,}5}{2{,}6}$ = 0,192

Error relativo 2 = $\dfrac{0{,}5}{2{,}8}$ =0,179

Suma de los error relativos = 0,371 o 37,1 %

Error absoluto = 0,371 x 7,28 cm^2 o 3,71 % x 7,28 cm^2 = 2,70cm^2
Los errores son expresados con una cifra significativa = 3 cm^2
El producto es igual a 7,3 ± 3 cm^2

d) Potencias y raíces.
Sea $z = x^n$
Donde n es el número entero o fracción positivo o negativo.

$$z \pm \Delta z = (x \pm \Delta x)^n$$

Esto se puede escribir

$$z \pm \Delta z = x^n \left(1 \pm \frac{\Delta x}{x}\right)^n$$

Haciendo la expansión binomial de $\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n$

$$\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n =$$

$$1 + n\frac{\Delta x}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 + \ldots$$

ignorando las potencias mayores que 1 de Δx

$$\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n = 1 + n\frac{\Delta x}{x}$$

De aquí

$$z \pm \Delta z = x^n \left(1 \pm n\frac{\Delta x}{x}\right)$$

El error de z es $\Delta z = nx^{n-1}\Delta x$
Y el error relativo es

$$\frac{\Delta z}{z} = n\frac{\Delta x}{x}$$

Ejemplo 10. Encontrar el error en el cálculo de $z = x^2$

Solución.

$$\Delta z = 2x^{2-1}\Delta x = 2x\Delta x$$

E error relativo es

$$\frac{\Delta z}{z} = 2\frac{\Delta x}{x}$$

Ejemplo 11. Encontrar el error en el cálculo de $z = \sqrt{x} = x^{1/2}$

Solución

$$\Delta z = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\Delta x = \frac{1}{2}\frac{\Delta x}{\sqrt{x}}$$

E error relativo es

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{1}{2}\frac{\Delta x}{x}$$

Ejemplo 12. Encontrar el error en el cálculo de

$$z = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

Solución.

$$\Delta z = -3x^{-3-1}\Delta x = -3x^{-4}\Delta x = -3\frac{\Delta x}{x^4}$$

Como los errores son indeterminados debemos elegir el signo de tal manera que éste sea el máximo, por esto:

$$\Delta z = 3\frac{\Delta x}{x^4}$$

y el error relativo es

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{3\frac{\Delta x}{x^4}}{\frac{1}{x^3}} = 3\frac{\Delta x}{x}$$

e) Cocientes.

Supongamos $z = \frac{x}{y}$

$$z \pm \Delta z = \frac{(x \pm \Delta x)}{(y \pm \Delta y)}$$

Esto se puede escribir como:

$$z \pm \Delta z = (x \pm \Delta x)(y \pm \Delta y)^{-1}$$

$$= x\left(1 \pm \frac{\Delta x}{x}\right)\frac{1}{y}\left(1 \pm \frac{\Delta y}{y}\right)^{-1}$$

$$\approx \frac{x}{y}\left(1 \pm \frac{\Delta x}{x}\right)\left(1 \mp \frac{\Delta y}{y}\right)$$

$$\approx \frac{x}{y}\left(1 \pm \frac{\Delta x}{x} \pm \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta x}{x}\frac{\Delta y}{y}\right)$$

Ignorando el último término por se muy pequeño y tomando el valor máximo para Δz.
El error de *z* es:

$$\Delta z = \frac{x}{y}\left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right) = \frac{y\Delta x + x\Delta y}{y^2}$$

El error relativo es:

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\frac{y\Delta x + x\Delta y}{y^2}}{\frac{x}{y}} = \frac{y\Delta x + x\Delta y}{xy} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

Ejemplo 13. Supongamos que queremos calcular la densidad ρ de un cilindro de metal habiendo medido su masa *M*, su longitud *L* y su diámetro *D*. Al mismo tiempo queremos calcular el error relativo resultante de los errores en las cantidades medidas. Sabemos que la densidad está dada por la ecuación

$$\rho = \frac{M}{\pi (D/2)^2 L} = \frac{4M}{\pi D^2 L}$$

Solución.

$$\rho = \frac{4M}{\pi D^2 L} = \frac{4}{\pi} M D^{-2} L^{-1}$$

Como 4 y π son cantidades exactas no tienen error.

El error relativo de *M* es $\frac{\Delta M}{M}$

El error relativo de *D* es $\frac{2\Delta D}{D}$

El error relativo de *L* es $\frac{\Delta L}{L}$

De aquí

El error relativo de ρ es

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta M}{M} + \frac{2\Delta D}{D} + \frac{\Delta L}{L}$$

Ejemplo 14. El volumen de un cilindro de base circular es $V = \pi R^2 L$. ¿Cuánto vale la incertidumbre o error en el volumen en términos de las incertidumbres ΔR y ΔL?

Solución.

Como π es cantidad exacta no tienen error.

El error relativo de *R* es $\frac{2\Delta R}{R}$

El error relativo de *L* es $\frac{\Delta L}{L}$

De aquí

El error relativo de *V* es

$$\frac{\Delta V}{V} = 2\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta L}{L}$$

Y el error absoluto:

$$\Delta V = \left(2\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta L}{L}\right) V = \pi R \left(2\Delta R + \frac{R}{L}\Delta L\right)$$

Ejemplo 15. Supongamos que queremos medir el periodo *T* de un oscilador, es decir, el tiempo que tarda en efectuar una oscilación completa, y disponemos de un cronómetro que aprecia las décimas de segundo, 0,1 s. Medimos el tiempo que tarda en hacer 10 oscilaciones, por ejemplo 4,6 s, dividiendo este tiempo entre 10 resulta *t* =0,46 s, ¿cómo se expresa la medida?

Solución.

$$T = \frac{t}{10}, \quad \Delta T = \frac{\Delta t}{10}$$

Obtenemos para el error $\Delta T = \frac{0,1}{10} = 0,01\text{ s}$. Por tanto, la medida la podemos expresar como

$$T = (0,46 \pm 0,01)\text{ s}$$

Ejemplo 16. La medida de los lados de un rectángulo son $(1,53 \pm 0,06)$ cm, y $(10,2 \pm 0,1)$ cm, respectivamente. Hallar el área del rectángulo y el error de la medida indirecta.

Solución.

El área es $A = 1,53 \times 10,2 = 15,606$ cm^2

Como debe de tener solamente 3 cifras significativas

$$A = 15,6\text{ cm}^2$$

El error relativo del área

$$\frac{\Delta A}{A} = \sqrt{\left(\frac{0,06}{1,53}\right)^2 + \left(\frac{0,1}{10,2}\right)^2} = 0,0404422504$$

El error absoluto del área

$$\Delta A = 0,0404422504(1,53 \times 10,2) = 0,63083$$

El error absoluto con una sola cifra significativa es 0,6.

La medida del área junto con el error y la unidad se escribirá como

$$A = (15,6 \pm 0,6)\text{cm}^2$$

Ejemplo 17. Se mide x con una incertidumbre Δx y se calcula $y = \ln x$. ¿Cuánto vale Δy?

Solución.

$$y + \Delta y = \ln(x + \Delta x)$$

En este caso podemos usar aproximaciones para cantidades pequeñas, cuando $|x| << 1$, tales como:

$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$, $e^x \approx 1 + x$, $\ln(1 + x) \approx x$, $\operatorname{sen} x \approx x$, $\cos x \approx 1$, $\tan x \approx x$

En nuestro caso

$$y + \Delta y = \ln(x + \Delta x) = \ln x\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \ln x + \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \approx \ln x + \frac{\Delta x}{x}$$

Como $\frac{\Delta x}{x} << 1$ podemos aplicar

$\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \approx \frac{\Delta x}{x}$, luego:

$$y + \Delta y = \ln x + \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \approx \ln x + \frac{\Delta x}{x}$$

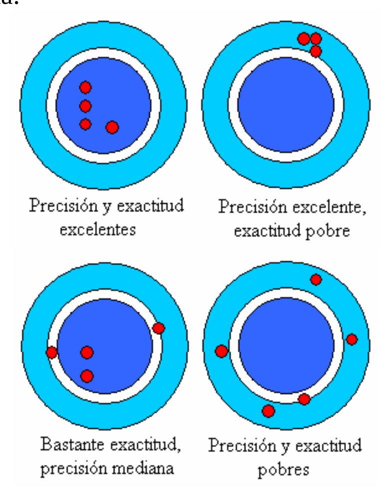
Siendo $y = \ln x$:

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{x}$$

PRECISIÓN Y EXACTITUD

Los términos "PRECISION " y "ACCURACY" del idioma inglés no son sinónimos, para efectos de lenguaje estadístico traduciremos "Precision" como precisión y "Accuracy" como exactitud, estableciendo diferencias claras entre las dos palabras.

La precisión es una indicación de la concordancia entre un número de medidas hechas de la manera indicada por el error absoluto. Un experimento de gran precisión tiene un bajo error al azar.
La exactitud es una indicación de cuan cercana está una medida al valor aceptado indicado por el error relativo o del porcentaje de error en la medida. Un experimento de gran exactitud tiene un error sistemático bajo.
Así como la obtención de una serie de medidas con las unidades correctas, se requiere una indicación del error experimental o el grado de incertidumbre en las medidas y la solución. Cuanto mayor es la exactitud y la precisión en nuestras investigaciones, más bajo es el grado de incertidumbre.
Las cuatro figuras a continuación ilustran la diferencia:

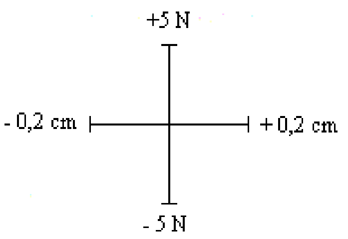


RANGO DE ERROR O INCERTIDUMBRE

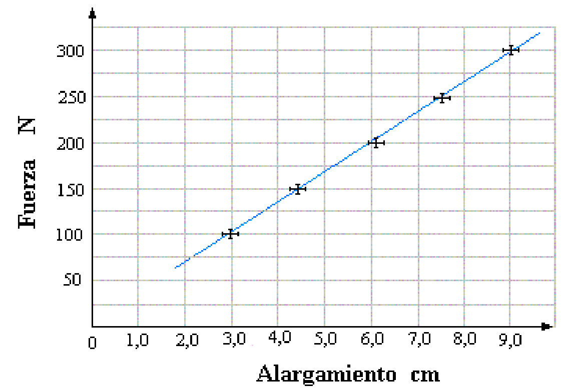
Cuando una respuesta se expresa como valor con incertidumbre tal como 2,3 ± 0,1 cm, entonces la gama de la incertidumbre es evidente. ¿El valor cae entre 2,4 (2,3 + 0,1) y 2,2 (2,3 - 0,1) cm. En la física, determinamos a menudo la relación que existe entre las variables. Para visión la relación, podemos realizar una investigación y trazar un gráfico del eje dependiente) contra la variable independiente (eje *x*). Considere un resorte que tenga varios pesos, unido a él. A mayor peso se une a un resorte, el resorte extiende más lejos de su posición del equilibrio. La tabla siguiente muestra algunos valores para esta investigación de Fuerza/alargamiento.

Fuerza ± 5 N	100	150	200	250	300
Alargamiento ± 0,2 cm	3,0	4,4	6,2	7,5	9,1

Cuando se traza un gráfico de la fuerza contra el alargamiento, la línea del mejor ajuste no pasa por cada punto. Una barra del error se puede utilizar para dar una indicación del rango de la incertidumbre para cada punto según se muestra en la figura a continuación Fuerza/alargamiento.



En la dirección vertical, dibujamos una línea arriba y abajo para que cada punto muestre la gama de incertidumbre del valor de la fuerza. Entonces ponemos una pequeña línea marcadora horizontal en el límite del extremo incierto para el punto.
En la dirección horizontal, dibujamos una línea a la izquierda y a la derecha para que cada punto muestre la gama de incertidumbre del valor de la extensión. Entonces ponemos una pequeña línea marcadora línea vertical en el límite del extremo incierto para el punto.
Cuando todos los puntos de la tabla se trazan en un gráfico, la línea del mejor ajuste con las barras apropiadas de error se muestra en la figura siguiente y se puede ver que la línea del mejor ajuste cae dentro del rango de la incertidumbre de la barra del error.



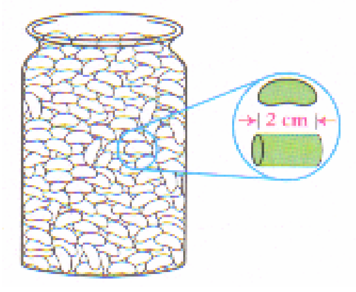
ESTIMADOS Y CÁLCULOS DEL ORDEN DE MAGNITUD

Hasta donde hemos visto, es importante cuidar el seguimiento de las incertidumbres en la medición cuando se calculan las respuestas a los problemas. En algunas ocasiones, tanto en la vida cotidiana como en el quehacer científico, es necesario resolver un problema del que no tenemos información suficiente para obtener una respuesta precisa. A menudo podemos obtener una respuesta útil mediante la estimación de los valores de las magnitudes apropiadas. Estas estimaciones, realizadas generalmente a la potencia de diez más cercana, se denominan estimaciones del orden de magnitud. El cálculo resultante del orden de magnitud no es exacto, pero generalmente es correcto con un factor de diez. El conocimiento justo del orden de magnitud de las cantidades físicas con frecuencia nos proporciona información suficiente para obtener una comprensión útil de la situación física y la capacidad para formarnos un juicio y hacer cálculos para la construcción de modelos.
Realizar estimaciones de magnitud con frecuencia es sencillo. Por ejemplo, imagine que va a la escuela por

primera vez y que quiere estimar cuánto dinero necesitara para comprar libros. Usted conoce que la carga habitual para la mayor parte de los estudiantes es de cinco materias, y que en cada una se necesita un libro de texto.
Con estos datos puede estimar el costo de un solo libro con el razonamiento siguiente. Sabe por experiencia que S/. 1 es demasiado bajo y que S/. 100 es demasiado alto. Incluso S/. 10 es bajo. Una estimación razonable puede ser S/. 50. Así, el costo estimado de los libros para un semestre es de 5 x S/. 50 = S/. 250. Aunque el resultado no es exacto, está dentro del orden de magnitud correcto y proporciona una estimación razonable a un problema real. El siguiente ejemplo ilustra la aplicación de las estimaciones del orden de magnitud.

Cuando hacemos cálculos de este tipo con frecuencia también efectuamos otras aproximaciones. Al remplazar π por 3 o remplazar $\sqrt{2}$ por 3/2 hacemos pocas diferencias en el orden de magnitud, pero hacerlo simplifica mucho los cálculos. Los ejemplos siguientes ilustran esta técnica.

Ejemplo 18. Una tienda ofrece un premio al cliente que adivine con la mayor aproximación el número de caramelos de goma que llenan un frasco de un litro exhibido en un mostrador de la tienda. (Un litro es igual a 1000 cm^3.) Estime cual será el número.



Solución.
Una revisión cuidadosa del frasco (véase la figura) revela varias cosas. Los caramelos de goma pueden aproximarse vagamente a pequeños cilindros de casi 2 cm de largo por aproximadamente 1,5 cm de diámetro. Además, los caramelos no están apretados en el frasco; posiblemente tan sólo se ha llenado 80% de éste. Podemos hacer uso de estas observaciones para estimar el número de caramelos que hay en el frasco.

$$\text{Número de caramelos} = \frac{\text{Volumen ocupado del frasco}}{\text{Volumen de un caramelo}}$$

EI volumen ocupado del frasco = 0,8 x 1000 = 800 cm^3,
Volumen de un caramelo =

$$h\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \approx 2\text{cm}\times 3\left(\frac{\frac{3}{2}\text{cm}}{2}\right)^2 \approx \frac{27}{8}\text{cm}^3$$

Así, el número aproximado de caramelos que hay en el frasco es:

$$\text{Número de caramelos} \approx \frac{800\text{cm}^3}{\frac{27}{8}\text{cm}^3} \approx 240 .$$

Un conteo realizado de los caramelos que llenan un frasco de un cuarto (0,95 litros) dio 255 caramelos.

MODELOS IDEALIZADOS
Ordinariamente usamos la palabra "modelo" para referimos a una réplica en menor escala (digamos, de un ferrocarril) o a una persona que exhibe ropa (o se exhibe sin ropa). En física, un modelo es una versión simplificada de un sistema físico que sería demasiado complejo si se analizase de forma detallada. Por ejemplo, supongamos que nos interesa analizar el movimiento de una pelota de béisbol lanzada en el aire. ¿Qué tan complicado es el problema? La pelota no es perfectamente esférica ni perfectamente rígida: tiene costuras, está girando y se mueve en el aire. El viento y la resistencia del aire afectan su movimiento, la Tierra gira, el peso de la pelota varía un poco al cambiar su distancia respecto al centro de la Tierra, etc. Si tratamos de incluir todos estos factores, la complejidad del análisis nos abrumará. En vez de ello, inventamos una versión simplificada del problema. Omitimos el tamaño y la forma de la pelota representándola como objeto puntual, o partícula. Despreciamos la resistencia del aire haciendo que la pelota se mueva en el vacío, nos olvidamos de la rotación terrestre y suponemos un peso constante. Ahora tenemos un problema sencillo de tratar.
Para crear un modelo idealizado del sistema debemos pasar por alto muchos efectos menores y concentramos en las características más importantes. Claro que hay que ser cuidadosos para no despreciar demasiadas cosas. Si ignoramos totalmente los efectos de la gravedad, nuestro modelo predecirá que si lanzamos la pelota hacia arriba ésta se moverá en línea recta y desaparecerá en el espacio. Necesitamos algún criterio y creatividad para crear un modelo que simplifique lo suficiente un problema sin omitir sus características esenciales.
Al usar un modelo para predecir el comportamiento de un sistema, la validez de las predicciones está limitada por la validez del modelo. La predicción de Galileo respecto a la caída de los cuerpos corresponde a un modelo idealizado que no incluye la resistencia del aire. El modelo funciona bien para una bala de cañón, pero no para una pluma.
El concepto de modelos idealizados es muy importante en física y en tecnología. Al aplicar principios físicos a sistemas complejos siempre usamos modelos idealizados, y debemos tener presentes las suposiciones que hacemos. De hecho, los principios mismos se expresan en términos de modelos idealizados; hablamos de masas puntuales, cuerpos rígidos, aislantes ideales, etc. Estos modelos desempeñan un papel crucial en este libro. Trate de

distinguirlos al estudiar las teorías físicas y sus aplicaciones a problemas específicos.

¿COMO ESTUDIAR FISICA?

Para estudiar física es necesario dar atención especial a los significados específicos de las palabras para poder entender el material, deben estudiarse detenidamente los gráficos, dibujos, tablas y fotografías incluidos para entender claramente los principios físicos involucrados.
Gran parte de lo que se aprenderá será en las clases. Deberán aprender a tomar apuntes exclusivamente de las partes significativas de cada lección y concentrarse por completo en lo que el profesor está diciendo, estos apuntes son necesariamente breves y carentes de relación. Por lo tanto, es recomendable tener un cuaderno ordenado con las notas de clase completando con apuntes tomados del estudio de los libros. Hagan esto tan pronto como sea posible después de clase, esto permitirá tener un conjunto de notas claras e inteligibles para repaso; ayudará a detectar las áreas débiles de conocimiento.
La parte más importante de los apuntes son los problemas resueltos. Resuélvanse todos los ejemplos vistos en clase y los dejados como tarea.
Richard Feynman premio Nóbel en física dijo: "usted no sabe nada sobre algo hasta que lo ha practicado".
La habilidad para resolver problemas no es sólo una prueba del dominio que cada cual posee de la ciencia, sino también un índice del crecimiento de nuestra propia capacidad como herramienta en las futuras tareas del intelecto.
Se recomienda desarrollar las habilidades necesarias para resolver un amplio rango de problemas. La habilidad para resolver problemas puede ser la principal prueba de los conocimientos. Es esencial que se comprendan los principios y conceptos básicos antes de intentar resolver problemas.
En física general los exámenes se componen principalmente de problemas a resolver, es muy importante que se entiendan y recuerden las hipótesis que sirven de base a una teoría o formalismo en particular.
Para la resolución de problemas se incluyen cinco etapas básicas:
a) Dibuje un diagrama con ejes coordenados si son necesarios y ponga las notaciones identificatorias, con esto podemos eliminar errores de signo.
b) Identifique el principio básico, incógnitas, listando los datos y las incógnitas.
c) Seleccione una relación básica o encuentre una ecuación que se pueda utilizar para determinar la incógnita y resuélvala simbólicamente. En esta forma se evitan errores y ayuda a pensar en términos físicos el problema.
d) Sustituya los valores dados con las unidades apropiadas dentro de la ecuación y obtenga el valor numérico de la incógnita.
e) Verificación y revisión del resultado por medio de las siguientes preguntas:
¿Las unidades coinciden?
¿Es razonable el resultado?
¿Es apropiado el signo? ¿Tiene significado?
Una vez que el estudiante ha desarrollado un sistema organizado para examinar problemas y extraer la información relevante, tendrá confianza y seguridad cuando tenga que resolverlos.

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Suponga que está planeando un viaje en automóvil a otra ciudad y estima el tiempo que se requiere para ir allá. Demuestre cómo esta estimación depende de un modelo. ¿Cómo se ha descrito en el texto y qué tan confiable es?

2. Dé un ejemplo personal del uso de un modelo para el análisis de los datos medidos.

3. Explique la idea básica detrás de la conversión de unidades.

4. Explique la diferencia en significado de las tres cantidades 10 m, 10.0 m y 10.00 m.

5. ¿Cuál de los números siguientes se da con tres cifras significativas: 0,003 m, 0,32 cm, 0,320 cm, 3,21 mm o 3,213 mm?

6. Un estudiante mide un rectángulo con una regla cuya medida varía ± 1 mm. Encuentra que la altura es 37 mm y el acho 46 mm. ¿Por qué debe informar que el área del rectángulo
1700 mm^2 en lugar de 1702 mm^2?

7 ¿Qué modelo describe en la forma más sencilla las observaciones siguientes?
a) Una pelota colocada en cualquier lugar sobre el piso permanece en reposo.
b) Una pelota colocada en cualquier lugar sobre el piso empieza a rodar.
c) Dé otros modelos más sencillos para estas observaciones.

Respuesta.
a) Bola esférica uniforme sobre un piso horizontal.
b) Bola esférica uniforme sobre un piso inclinado.
c) Para a) la bola tiene una parte plana o no es uniforme y para b) la bola es asimétrica y empieza a rodar hacia su lado más pesado.

8. Se lanza un dado muchas veces con los resultados siguientes para el número que aparece en su cara superior: 1, 63 veces; 2, 58 veces; 3, 62 veces; 4, 63 veces; 5, 75 veces y 6, 61 veces. ¿Qué modelo puede hacer para el dado?

Respuesta.
El dado es más pesado hacia el punto 2.

9. Un cubo de metal flota en un líquido. ¿Cuál es el modelo más sencillo del cubo y del líquido? ¿Hay otros modelos?
Respuesta.
El cubo tal vez sea hueco si flota en el agua. Alternativamente, el cubo es sólido pero flota en un líquido que es más denso que él.

10. Un litro (*L*) es un volumen de 10 cm^3. ¿Cuántos centímetros cúbicos hay en 2,5 mililitros?
Respuesta.
2,5 cm^3

11. ¿Qué tan lejos viaja la luz en un vacío en 1,0 nanosegundos (Velocidad de la luz = 3,0 x l0^8 m/s.)
Respuesta
30cm

12. Los granos negros en algunos tipos de películas fotográfica son de aproximadamente 0,8 μ m de sección. Asuma que los granos tienen una sección transversal cuadrada y que todos quedan en un solo plano de la película. ¿Cuántos granos se requieren para oscurecer completamente 1 cm^2 de película?
Respuesta.
1,6 x 10^8

13. Una fórmula se lee $y = ½ at^2$, donde *y* está en metros y *t* en segundos. ¿Cuáles son las dimensiones de *a*?
Respuesta.
m/s^2

14. ¿Cuál es la altura en centímetros de una persona cuya estatura es 5'l1''?
Respuesta.
180cm

15. ¿Cómo es 40,2 mi expresado en kilómetros?
Respuesta
64,7 km

16. Exprese 130 km/h en términos de millas por hora.
Respuesta.
80,8 mi/h

17 Una tienda anuncia un tapete que cuesta US $18,95 por yarda cuadrada. ¿Cuánto cuesta el tapete por metro cuadrado?
Respuesta.
22,66 dólares/m^2

18. Cuando la gasolina se vende a US $1,609 por galón, ¿cuál es el precio en dólares por litro? (1 gal = 3,l7853 L)
Respuesta.
0,282 dólares/L

19. ¿Cuál es el área en centímetros cuadrados de un pedazo de papel de 8 pulg x 14 pulg?
Respuesta.
1.25 768 cm^2

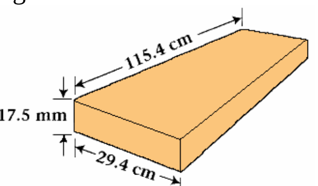
20. Los listones de madera en una cerca están espaciados 6,0 pulgadas, de centro a centro. ¿Cuántos listones están contenidos en un metro de valla?
Respuesta.
6,6

21. La Luna gira sobre su eje cada 271/3 días de modo que la misma cara está siempre hacia la Tierra. ¿A cuántos grados rotará la Luna respecto a su propio eje en una hora?
Respuesta.
0,549°

22. ¿Cuántas revoluciones hace el segundero de un reloj en tres años? Suponga que no hay año bisiesto en el intervalo.
Respuesta.
1,58 x 10^6 revoluciones

23. La Tierra tiene una masa de 5.98 x 10^{24} kg y un radio de 6,38 x 10^6 m. a) ¿Cuál es la masa por unidad de volumen de la Tierra en kg/m^3? b) ¿Cuál es la masa por unidad de volumen de un núcleo de oro que tiene una masa de 3,27 x 10^{25} kg y un radio de 6,98 x 10^{-15} m? c) ¿Cuál sería el radio de la Tierra si su masa no cambiara, pero tuviera la misma masa, por unidad de volumen, que el núcleo de oro?
Respuesta.
a) 5,50 x 10^3 kg/m^3, b) 2,30 x 10^{17} kg/m^3, c) 184 m

24. Calcule el volumen de la tabla rectangular con altura de 17,5 mm, ancho de 29,4cm y longitud 115,4 cm. Recuerde la regla que se refiere a las cifras significativas.



Respuesta.
5,94 x 10^3 cm^3

25. Si usted mide los lados de un cuadrado y son de diez centímetros con una exactitud de ±1 %, ¿cuál es el área del cuadrado y cuál es la incertidumbre?
Respuesta.
(100 ± 2) cm^2

26. Sume los números siguientes: 3,57 x 10^2, 2,43 x 10^3 y 4,865 x 10^2.
Respuesta.
3,27 x 10^3

27. Un legajo de papel copia tiene 5,08 cm de espesor. ¿Cuál es el espesor de una sola hoja del papel? Exprese su respuesta en m y mm.
Respuesta.
1,02 x 10^{-4} m o 0,102 mm

28. El piso rectangular de un gimnasio tiene lados de longitud de $x \pm \Delta x$ por $y \pm \Delta y$ donde Δx y Δy son las incertidumbres estimadas en las mediciones y son pequeñas comparadas con x e y. Demuestre por cálculo directo que el área del piso y la incertidumbre en esa área están dadas por $A = xy \pm xy\left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right)$ cuando se ignoran términos muy pequeños, del orden de $(\Delta x)^2$. (En la mayor parte de los casos, este resultado sobrestima la incertidumbre en el área, porque no toma en consideración que las incertidumbres en las longitudes, Δx y Δy, provienen de una serie de medidas, que tienen una dispersión natural en sus valores.)

29. Estime el espesor de las páginas de un libro. Dé su resultado en milímetros.
Respuesta.
Aproximadamente 0,06 mm

30. Alrededor de cuántos ladrillos se requieren para construir una pared de altura hasta el hombro de 100 pies de largo? Los ladrillos estándar tienen 8 pulg de largo por 2 1/4 pulg de alto y están separados por 3/8 de pulgada de mortero.
Respuesta.
3,3 x 10^3 ladrillos

31. ¿Cuál es el volumen en milímetros cúbicos de un cubo de 1,00 pulg por lado?
Respuesta.
1,64 x 10^4 mm^3

32. En algunos países el consumo de gasolina de un automóvil se expresa en litros consumidos por 100 km de viaje. Si un automóvil logra 27 millas/galón, cuál es el consumo de combustible en litros por 100 km? (1 gal = 3,7853 L)
Respuesta.
8,7 L/100 km

33. La velocidad del sonido a la temperatura ambiente es 340 m/s. Exprese la velocidad del sonido en unidades de millas por hora.
Respuesta.
761 mi/h

34. a) ¿Cuántos milisegundos hay en un minuto? ¿Cuántos gigasegundos hay en un siglo?
Respuesta.
a) 1 min = 60000 ms, b) 1 siglo = 3,16 Gs

35. a) Calcule la altura de un cilindro de radio R que tiene el mismo volumen de una esfera de radio R. b) Demuestre que el cilindro tiene un área superficial mayor que la esfera.
Respuesta.
$$h = \frac{4}{3}R$$

36. Considere una esfera que se ajusta exactamente dentro de un cubo. ¿Cuál es la relación del volumen de la esfera al volumen del cubo?
Respuesta.
$\pi / 6$

37. Un vaso cilíndrico para malteada tiene un radio interior medido de $r \pm \Delta r$ y una altura de $h \pm \Delta h$. Demuestre que el volumen del vaso es $V = \pi r^2 h \pm 2\pi h \Delta r \pm \pi r^2 \Delta h$ si se ignoran los términos muy pequeños del orden $(\Delta r)^2$

CAPITULO 2. Movimiento rectilíneo

DEFINICIÓN DE PARTÍCULA.
El Punto Material
Es una idealización de los cuerpos que existen en la naturaleza y que llamamos punto material. Es un cuerpo cuyas dimensiones son despreciables al compararlas con las otras dimensiones que intervienen en el movimiento.
La Mecánica comienza con el estudio de los puntos materiales y después extiende estos estudios a los sistemas de puntos materiales, incluyendo cuerpos rígidos y deformables.
El punto material, a diferencia de un punto geométrico, está asociado a una masa inercial; esta propiedad está íntimamente ligada al movimiento de los cuerpos, como podemos ver cuando tratamos de entender cómo se mueven los cuerpos.

CONCEPTO DE MOVIMIENTO
El **movimiento** es un fenómeno físico que se define como todo cambio de posición que experimentan los cuerpos en el espacio, con respecto al tiempo y a un punto de referencia, variando la distancia de dicho cuerpo con respecto a ese punto o sistema de referencia, describiendo una trayectoria. Para producir movimiento es necesaria una intensidad de interacción o intercambio de energía que sobrepase un determinado umbral.
La parte de la física que se encarga del estudio del movimiento es la cinemática.

CLASIFICACIÓN DEL MOVIMIENTO
Según se mueva un punto o un sólido pueden distinguirse distintos tipos de movimiento:

Según la trayectoria del punto: Rectilíneo y curvilíneo
Movimiento rectilíneo: La trayectoria que describe el punto es una línea recta.
Movimiento curvilíneo: El punto describe una curva cambiando su dirección a medida que se desplaza.
Casos particulares del movimiento curvilíneo son la rotación describiendo un círculo en torno a un punto fijo, y las trayectorias elípticas y parabólicas.

Según la trayectoria del sólido: Traslación y rotación.
Traslación: Todos los puntos del sólido describen trayectorias iguales, no necesariamente rectas.
Rotación: Todos los puntos del sólido describen trayectorias circulares concéntricas.

Según la dirección del movimiento:
Alternativo y pendular.
Alternativo: Si la dirección del movimiento cambia, el movimiento descrito se denomina alternativo si es sobre una trayectoria rectilínea o pendular.
Pendular: Si lo es sobre una trayectoria circular (un arco de circunferencia).

Según la velocidad: Uniforme y uniformemente variado.
Movimiento uniforme: La velocidad de movimiento es constante
Movimiento uniformemente variado: La aceleración es constante, como es el caso de los cuerpos en caída libre sometidos a la aceleración de de la gravedad.

SISTEMAS DE REFERENCIA. POSICIÓN Y DESPLAZAMIENTO.

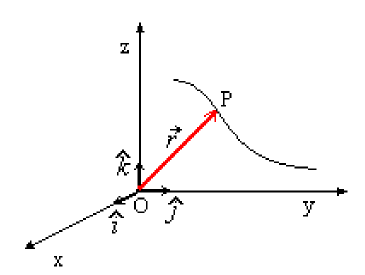
El movimiento es una noción esencialmente relativa. Así resulta que el movimiento como el reposo son hechos relativos, no se puede decir que algo se mueve o que está en reposo sin añadir respecto a qué. En consecuencia necesitamos un sistema de referencia para descubrir el movimiento.

Sistemas de referencia. Desde el punto de vista estrictamente matemático, un sistema de referencia en un espacio vectorial de dimensión ***n*** está formado por ***n*** vectores linealmente independientes, formando una base del espacio, y por un punto, definido por ***n*** coordenadas, que suele llamarse origen del sistema de referencia.
En el dominio de la física, el espacio suele ser la base más habitual la llamada ortonormal ($\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$), y el origen se sitúa a conveniencia del observador. Los vectores de la base son $\hat{i} = (1,0,0)$, $\hat{j} = (0,1,0)$ y $\hat{k} = (0,0,1)$.
Atendiendo a su posible estado de reposo o movimiento, los sistemas de referencia pueden ser clasificados siempre y cuando hablemos de su relación respecto a otro sistema de referencia que arbitrariamente supongamos inmóvil. En efecto, debe tenerse en cuenta que cualquier sistema de referencia está moviéndose respecto a otro (este papel gira y se traslada con la Tierra alrededor del Sol, el cual a su vez se desplaza en la galaxia, que a su vez se expande en el Universo...), por lo que no cabe hablar de un sistema de referencia absoluto.
De acuerdo con lo anterior, un sistema de referencia puede estar:
a) en reposo respecto a otro
b) moviéndose con velocidad constante $\vec{v}$ respecto al supuestamente fijo
c) con una aceleración respecto al fijo.

Un buen ejemplo del primer caso podemos encontrarlo en un sistema de referencia como la pizarra, que se encuentra en reposo relativo respecto a las paredes del aula (en condiciones normales).
Un ejemplo de sistema de referencia inercial podemos encontrarlo en un tren que se mueve en un tramo de vía rectilíneo con una velocidad sensiblemente constante.

Y por último, la propia Tierra constituye un sistema de referencia no inercial, ya que gira con una aceleración normal, que si bien es pequeña, en ciertos fenómenos se observa con claridad.

Vector Posición.- Para fijar la posición de un punto en el espacio respecto a un origen de coordenadas bastan tres números que pueden ser las proyecciones sobre los ejes de un sistema cartesiano ortogonal.



El vector posición del punto P es:

$$\vec{OP} = \vec{r}$$

El movimiento quedará especificado si conocemos el vector posición para cada instante, es decir:

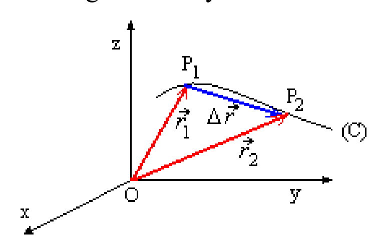
$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Esto se conoce como ley de movimiento.
El vector posición puede ser expresado a través de las ecuaciones paramétricas de sus componentes en función del tiempo:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

$$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Desplazamiento.
La figura muestra una partícula que se está moviendo a lo largo de la trayectoria curvilínea C.

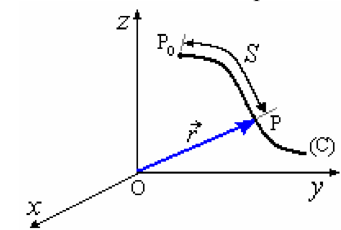


Sean P_1 y P_2 las posiciones de la partícula en los instantes t_1 y $t_2 = t_1 + \Delta t$. Los vectores posición correspondientes son

$$\overline{OP}_1 \text{ y } \overline{OP}_2 = \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}.$$

Siendo $\Delta\vec{r}$ el vector desplazamiento y describe el desplazamiento de la partícula de la posición P_1 a la posición P_2.

Trayectoria y Ecuación Horaria del Movimiento.-
Se llama trayectoria de una partícula en movimiento al lugar geométrico de las posiciones efectivamente ocupadas por la partícula en el transcurso del tiempo. De acuerdo al tipo de movimiento podrá ser una recta, circunferencia, espiral, parábola o curvas tan complicadas como se nos ocurra.
La trayectoria no define el movimiento, pues no sabemos en que instante de tiempo ocupó cada punto. Sabemos dónde estuvo, pero no cuando y si estuvo varias veces en cada punto o no. Hace falta la ecuación horaria.
Para encontrar la ecuación horaria debemos medir las distancias en función del tiempo.



En la figura P_0 es un origen fijo sobre la curva (C) que porta la trayectoria.
Sea P la posición de la partícula en el instante t sobre la trayectoria definida por el arco

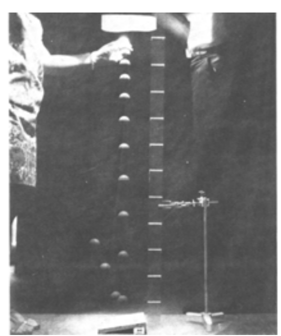
$$\overset{\frown}{P_0P} = S$$

La ecuación horaria del movimiento de la partícula P es

$$S = S(t)$$

Ejemplo experimental. Estudio del movimiento de la caída libre de un cuerpo.
Solución.
Si dejamos caer un objeto, obtenemos que la trayectoria sea una recta vertical.
Para encontrar la ley del movimiento podemos intentar medir a partir de dónde la dejamos caer, distancias sucesivas para diferentes tiempos.
Una forma experimental es usando una película fotográfica y una flash electrónico que se encienda por ejemplo cada 1/30 de segundo. En una habitación oscura dispondremos el cuerpo, la película y un disparador que deje caer el cuerpo y simultáneamente accione el flash. Paralelamente a la trayectoria a seguir por el objeto se fija una regla.

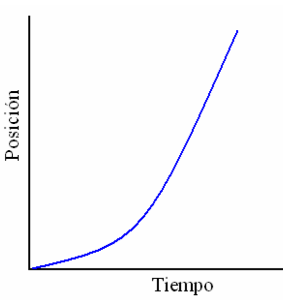




La fotografía mostrada permite conocer las cotas de la foto en los diferentes instantes bien determinados. La tabla muestra los resultados de la fotografía:

Tiempo	Cota(m)
t_0	0,2480
t_1	0,3250
t_2	0,4130
t_3	0,5130
t_4	0,6235
t_5	0,7450
t_6	0,8875
t_7	1,0215
t_8	1,1760
t_1	1,3405
t_{10}	1,5155

Tracemos la curva representativa del la función $z = f(t)$



Esta curva corresponde a una parábola y su expresión matemática es

$z = kt^2$

Donde $\begin{cases} z \text{ está en segundos} \\ k = 4{,}9\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ t \text{ está en segundos} \end{cases}$

Luego la ecuación horaria es

$s = kt^2$

Si fijamos el origen del movimiento en $z = 0$, la ley del movimiento es

$\vec{r} = -kt^2\hat{k}$

Las ecuaciones paramétricas son

$x = 0$, $y = 0$ y $z = kt^2$

En esencia para cualquier movimiento debemos ingeniarnos para obtener la ecuación horaria y conocida su trayectoria, queda determinado el movimiento.

VELOCIDAD Y RAPIDEZ

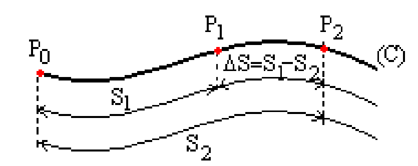
Rapidez. La rapidez (que en el lenguaje común se denomina simplemente velocidad) se define como el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido. La distancia s recorrida a lo largo de una trayectoria es una magnitud escalar, independiente de la dirección. Como el tiempo también es un escalar, la rapidez es también un escalar.

La rapidez se designa mediante el símbolo v y sus dimensiones son:

$[v] = \text{LT}^{-1}$

La unidad en el sistema SI es el metro por segundo (m/s).

La figura muestra una partícula que se está moviendo a lo largo de la trayectoria curva C. En el instante t_1 esta en P_1, a una distancia S_1 de un punto P_0 de referencia. En el instante t_2 está en P_2 a una distancia S_2 del punto de referencia.



En el tiempo que transcurre entre t_1 y t_2, $\Delta t = t_2 - t_1$, la partícula ha recorrido una distancia ΔS es la diferencia entre S_2 y S_1, esto es $\Delta S = S_2 - S_1$.

Se define como **rapidez media** dentro de este intervalo

$$v_m = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

El símbolo Δ (delta) significa un incremento de una magnitud física.

Si la rapidez de la partícula varía a lo largo de la trayectoria, para conocer con mejor precisión el movimiento debemos hacer los intervalos ΔS más pequeños y tomar la rapidez media de cada uno de ellos. La figura a continuación nos muestra el gráfico distancia recorrida versus tiempo, observen que cuando t_2 tiende a t_1, Δ t tiende a cero.

Mediante este proceso llamamos a la **rapidez instantánea** *v* en el instante *t*. Este proceso se expresa matemáticamente como

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$

Tangente a la curva en t_1

Distancia recorrida, S, S_2, S_1, ΔS, Δt, t_1, t_2, Tiempo, t

La cantidad $\frac{dS}{dt}$ se llama "derivada de S con respecto a t" y el proceso de encontrarla se llama derivación o diferenciación. La notación dS, dt, expresa incrementos infinitesimalmente pequeños que se conocen como diferenciales.

Ejemplo 1.
a) Hallar una expresión para la rapidez de una partícula que se mueve de acuerdo a la ley horaria
$S = At^2$
b) Si $A = 1{,}4$ m/s^2, hallar la distancia a la que se encuentra la partícula y su rapidez para 10 segundos después de iniciado su movimiento.
Solución.
a) Si en el tiempo t está en $S_{(t)}$:

$$S_{(t)} = At^2$$

Transcurrido un tiempo Δt, la partícula estará en $S_{(t+\Delta t)}$

$$S_{(t+\Delta t)} = A(t+\Delta t)^2$$
$$= At^2 + 2At\Delta t + A(\Delta t)^2,$$

Como

$$\Delta S = S_{(t+\Delta t)} - S_t$$
$$= At^2 + 2At\Delta t + A(\Delta t) - At^2$$
$$= 2At\Delta t + A(\Delta t)^2$$

La rapidez en el instante t es:

$$v_{(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2At\Delta t + A(\Delta t)^2}{\Delta t} = 2At$$

b) Para $t = 10$ es

$$S_{(10)} = \left(1{,}4\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(10\text{s})^2 = 140\text{ m}$$

y su rapidez es

$$v_{(10)} = 2\left(1{,}4\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(10\text{s})^2 = 28\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ejemplo 2. Hallar una expresión para la rapidez de una partícula que se mueve según la ecuación horaria

$$S(t) = A\text{sen}(\omega t)$$

Solución.
En el intervalo de tiempo de t hasta $t + \Delta t$ la partícula que se mueve:

$$\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$$
$$= A\text{sen}\,\omega(t+\Delta t) - A\text{sen}\,\omega t$$
$$= A\text{sen}\,\omega t\cos(\omega\Delta t) + A\cos\omega t\,\text{sen}(\omega\Delta t)$$
$$- A\text{sen}\,\omega t$$

La rapidez en un instante t cualquiera es

$$v = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0}\frac{A\text{sen}\,\omega t\cos(\omega\Delta t) + A\cos\omega t\,\text{sen}(\omega\Delta t) - A\text{sen}\,\omega t}{\Delta t}$$
$$v = A\omega\cos\omega t$$

El proceso desarrollado en los dos ejemplos anteriores se hace simple con la práctica.
Hay muchas reglas o fórmulas para derivar diferentes tipos de funciones. Estas pueden memorizarse o encontrarse en tablas. La tabla siguiente es una pequeña muestra de estas.

Derivadas de algunas funciones

Función	Derivada
$S = t^n$	$\frac{dS}{dt} = nt^{n-1}$
$S = c$	$\frac{dS}{dt} = 0$
$S = cu$	$\frac{dS}{dt} = c\frac{du}{dt}$
$S = u + v$	$\frac{dS}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt}$
$S = uv$	$\frac{dS}{dt} = v\frac{du}{dt} + u\frac{dv}{dt}$
$S = A\text{sen}\,\omega t$	$\frac{dS}{dt} = A\omega\cos\omega t$
$S = A\cos\omega t$	$\frac{dS}{dt} = -A\omega\,\text{sen}\,\omega t$

Ejemplo 3. Hallar una expresión para la rapidez de una partícula que se mueve de acuerdo a la ley horaria $S = At^2$, usando fórmulas de la tabla anterior.
Solución.
Tenemos que:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d(At^2)}{dt} = A\frac{dt^2}{dt} = 2At$$

Ejemplo 4. Hallar una expresión para la rapidez de una partícula que se mueve de acuerdo a la ley

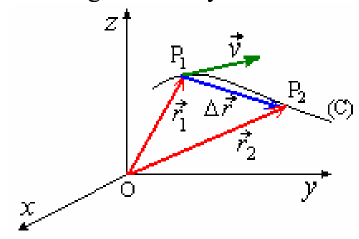
horaria $S(t) = A\text{sen}(\omega t)$, usando fórmulas de la tabla anterior.

Solución.

Tenemos que

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d(A\text{sen}\,\omega t)}{dt} = A\frac{d\text{sen}\,\omega t}{dt} = A\omega\cos\omega t$$

Velocidad. La velocidad (que más apropiadamente sería vector velocidad), a diferencia de la rapidez debemos incluir el concepto de dirección en nuestro estudio; para esto debemos emplear vectores.
La figura muestra una partícula que se está moviendo a lo largo de la trayectoria curvilínea C.



Sean P_1 y P_2 las posiciones de la partícula en los instantes t_1 y $t_2 = t_1 + \Delta t$. Los vectores posición correspondientes son $\overline{OP}_1 = \vec{r}_1$ y $\overline{OP}_2 = \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$. Siendo $\Delta\vec{r}$ el vector desplazamiento y describe el desplazamiento de la partícula de la posición P_1 a la posición P_2.

Velocidad media. El cociente entre el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ y el intervalo de tiempo Δt es el vector velocidad media.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

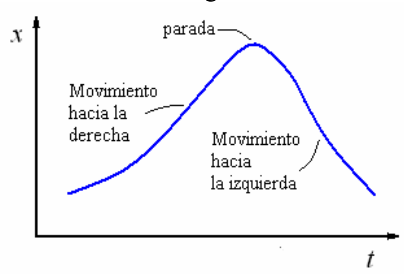
Como el desplazamiento es un vector y el tiempo es un escalar positivo, la velocidad es una magnitud vectorial que tiene la misma dirección y sentido que el desplazamiento. Esto significa que si una partícula sufre un desplazamiento negativo, su velocidad será también negativa.

Velocidad instantánea. Como en el caso de la rapidez obtendremos la velocidad instantánea $\vec{v}$ tomando la velocidad media en un intervalo de tiempo cada vez menor Δt medido desde un cierto tiempo t_1. En el límite, cuando Δt tiende a cero:

$$\vec{v}(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1}\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

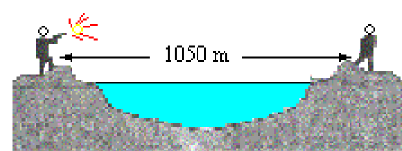
La dirección de este vector es la dirección límite del vector cuando $\Delta t \to 0$ de la figura anterior. Es evidente que en este límite la dirección de $\Delta\vec{r}$ es la de la tangente la trayectoria en P_1.

La magnitud del vector velocidad instantánea, $\vec{v}$, es decir $|\vec{v}|$ o simplemente v es igual a la rapidez instantánea en ese punto.
La velocidad es la pendiente del gráfico de *x* versus *t*, como se muestra en la figura.



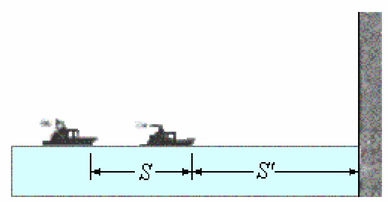
Cuando la pendiente es positiva, el objeto se está moviendo a la derecha.
Cuando la pendiente es negativa, el objeto se está moviendo a la izquierda.
Cuando la pendiente es cero, el objeto se detiene.

Ejemplo 5. Entre dos observadores hay una distancia de 1050 m, uno de ellos dispara un arma de fuego y el otro cuenta el tiempo que transcurre desde que ve el fogonazo hasta que oye el sonido, obteniendo un valor de 3 s. Despreciando el tiempo empleado por la luz en hacer tal recorrido, calcular la velocidad de propagación del sonido.



Solución.
La velocidad es:
$c = s/t = 1050/3 = 350$ m/s

Ejemplo 6. Nos encontramos en una batalla naval, en un buque situado entre el enemigo y los acantilados de la costa. A los 3 s de ver un fogonazo oímos el disparo del cañón, y a los 11 s del fogonazo percibimos el eco. Calcular la distancia a que están de nosotros el enemigo y la costa. Velocidad del sonido, 340 m/s.



Solución.
Despreciando el tiempo empleado por la luz en su recorrido, la distancia a que se encuentra el enemigo es:
$S = 340 \text{ x } 3 = 1020$ m
El sonido emplea para ir y volver a la costa, desde nuestra posición, un tiempo que es:
$t = 11 - 3 = 8$ s $\Rightarrow 2S' = 340 \text{ x } 8 \Rightarrow S' = 1360$ m
La costa está a 1020 + 1360 = 2380m.

Ejemplo 7. La posición de una partícula en coordenadas cartesianas está dada por la ecuación

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

donde

$$x(t) = 5 + 6t^2,\quad y(t) = 3t,\quad z(t) = 6$$

t en segundos, x, y, z en metros.

a) Determinar el desplazamiento entre $t = 0$ y $t = 1$ s.

b) Determinar la velocidad media

c) Determinar la velocidad y la rapidez para $t = 1$ s.

Solución.

a) para $t = 0$ s, $x = 5$m, $y = 0$m, $z = 6$m

$$\vec{r}_0 = 5\hat{i} + 6\hat{k}$$

Para $t = 1$s, $x = 11$m, $y = 3$m, $z = 6$m

$$\vec{r}_1 = 11\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

El desplazamiento es

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = (11-5)\hat{i} + (3-0)\hat{j} + (6-6)\hat{k}$$
$$= 6\hat{i} + 3\hat{j}$$

b) la velocidad media es

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{6\hat{i} + 3\hat{j}}{1-0} = 6\hat{i} + 3\hat{j}$$

c) la velocidad instantánea es

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left[(5+6t^2)\hat{i} + 3t\hat{j} + 6\hat{k}\right]}{dt}$$
$$= 12t\hat{i} + 3\hat{j}$$

La magnitud de v es

$$v = \sqrt{12^2 + 3^2} = \sqrt{153}$$
$= 12,4$ m/s

Valor que corresponde a la rapidez instantánea para $t = 1$s.

Ejemplo 8. Un auto está parado ante un semáforo. Después viaja en línea recta y su distancia respecto al semáforo está dada por $x(t) = bt^2 - ct^3$, donde $b = 2,40$ m/s^2 y $c = 0,120$ m/s^3.

a) Calcule la velocidad media del auto entre $t = 0$ y $t = 10,0$ s.

b) Calcule la velocidad instantánea en
i) $t = 0$; ii) $t = 5,0$ s; iii) $t = 10,0$ s.

c) ¿Cuánto tiempo después de arrancar vuelve a estar parado el auto?

Solución.

a) En $t_1 = 0$, $x_1 = 0$, tal que la ecuación

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$v_m = \frac{x_2}{t_2} = \frac{(2,4)(10)^2 - (0,120)(10)^3}{(10)}$$
$= 12,0$ m/s

b) de la ecuación $v_x = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$, la velocidad instantánea en función del tiempo es

$$v_x = 2bt - 3ct^2 = (4,80)t - (0,360)t^2$$

tal que

i) $v_x(0) = 0$,

ii) $v_x(5) = (4,80)(5) - (0,360)(5)^2 = 15,0$ y

iii) $v_x(10) = (4,80)(10) - (0,360)(10)^2 = 12,0$

c) el auto está en reposo cuando $v_x = 0$.

Por consiguiente $(4,80)t - (0,360)t^2 = 0$.

El único tiempo después de $t = 0$ en que el auto se encuentra en reposo es $t = \frac{4,8}{0,360} = 13,3$ s

Ejemplo 9. Un ciclista marcha por una región donde hay muchas subidas y bajadas

En las cuestas arriba lleva una rapidez constante de 5 km/h y en las cuestas abajo 20 km/h. Calcular:

a) ¿Cuál es su rapidez media si las subidas y bajadas tienen la misma longitud?

b) ¿Cuál es su rapidez media si emplea el mismo tiempo en las subidas que en las bajadas?

c) ¿Cuál es su rapidez media si emplea doble tiempo en las subidas que en las bajadas?

Solución.

a) $$v_m = \frac{s_{total}}{t_{total}} = \frac{s_{subida} + s_{bajada}}{t_{total}}$$
$$= \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 8 \text{ km/h}$$

b) $$v_m = \frac{v_1t + v_2t}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$
$= 12,5$ km/h

c) $$v_m = \frac{v_1 2t + v_2t}{3t} = \frac{2v_1 + v_2}{3} = \frac{2\times 5 + 20}{3}$$
$= 10$ km/h

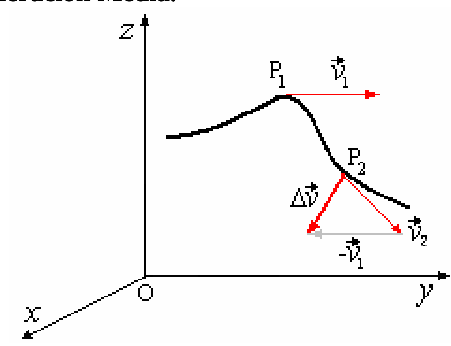
(Obsérvese que la rapidez media es la media aritmética de las rapideces uniformes únicamente en el caso de que el tiempo que duran los distintos recorridos sea el mismo).

ACELERACIÓN

En el lenguaje ordinario el término aceleración se refiere sólo a incrementos del módulo de la velocidad (rapidez), pero en Física se utiliza con un sentido más amplio para designar un cambio del vector velocidad. En Física se dice que un cuerpo está siendo acelerado no sólo cuando aumenta su velocidad sino también cuando disminuye o cambia de dirección.

Se llama aceleración al cambio de la velocidad (vector velocidad) en el tiempo.

Aceleración Media.



La razón en la cual la velocidad cambia se mide por la aceleración. Así si un objeto tiene la velocidad $\vec{v}_1$ en el t_1 del tiempo y velocidad $\vec{v}_2$ en el t_2, su aceleración media es

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\hat{i}$$

Supongamos que una partícula que se mueve en la trayectoria C de la figura anterior en el instante t_1 está en P_1 con una velocidad v_1 y en el instante $t_2 = t_1 + \Delta t$ está en P_2 con una velocidad v_2. Por definición el vector aceleración media de la partícula entre los instantes es t_1 y t_2 es

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Las dimensiones de la aceleración son $[a] = LT^{-2}$

La unidad de la aceleración en el sistema SI está en metros / segundo por segundo:

$$\frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Aceleración Instantánea o simplemente aceleración. Cuando $t_2 \to t_1$ o $\Delta t \to 0$ llegaremos al valor de la aceleración en el instante t_1. Este proceso para el límite se expresa matemáticamente como

$$\vec{a}_{(t_1)} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Como $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, tenemos:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Es mejor evitar el uso de la palabra común "desaceleración."

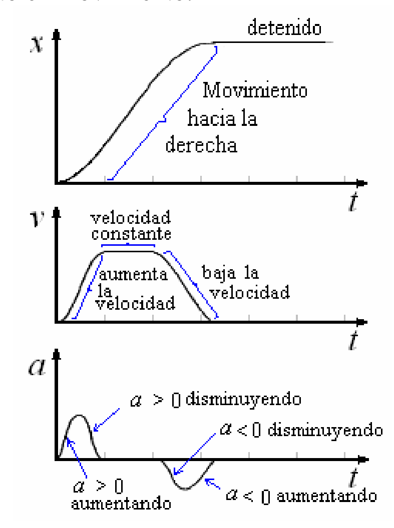
Describa la aceleración simplemente como positiva o negativa.

Observe que la aceleración negativa no significa necesariamente "bajar la velocidad".

Cuando la velocidad y la aceleración ambas tienen el mismo signo, el objeto aumenta su velocidad.

Cuando la velocidad y la aceleración tienen signos opuestos, el objeto disminuye su velocidad.

Los gráficos de la figura siguiente ilustran el desplazamiento, la velocidad, y la aceleración para un objeto en movimiento.



Ejemplo 10. Una partícula se mueve a lo largo de una línea curva

$$\vec{r}_{(t)} = (t^2 + t)\hat{i} + (2t - 1)\hat{j} + (t^3 - 2t^2)\hat{k}$$

Encontrar:

a) La velocidad para $t = 1\,\text{s}$ y para $t = 3\,\text{s}$.

b) La aceleración media entre $t = 1\,\text{s}$ y para $t = 3\,\text{s}$.

c) La aceleración y su magnitud para $t = 1\,\text{s}$.

Solución.

a) Las ecuaciones paramétricas son:

$$x(t) = t^2 + 1,\ y(t) = 2t - 1,\ z(t) = t^3 - 2t^2$$

Las componentes de la velocidad son:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2t + 1,\ v_y = \frac{dy}{dt} = 2.$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = 3t^2 + 4t$$

La velocidad es:

$$\vec{v}_{(t)} = (2t + 1)\hat{i} + 2\hat{j} + (3t^2 - 4t)\hat{k}$$

Para $t = 1\,\text{s}$: $\vec{v}_{(1)} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

Para $t = 3\,\text{s}$. $\vec{v}_{(3)} = 7\hat{i} + 2\hat{j} + 15\hat{k}$

b) La aceleración media entre $t = 1\,\text{s}$ y $t = 3\,\text{s}$.

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{(3)} - \vec{v}_{(1)}}{3 - 1} =$$

$$\frac{(7-3)\hat{i} + (2-2)\hat{j} + (15+1)\hat{k}}{2}$$

$$\vec{a}_m = 2\hat{i} + 8\hat{k}$$

c) la aceleración instantánea es

$$\vec{a}_{(t)} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(2t+1)\hat{i} + 2\hat{j} + (3t^2 - 4t)\hat{k}\right]$$

$$= 2\hat{i} + (6t-4)\hat{k}$$

para $t = 1s$

$$\vec{a}_{(1)} = 2\hat{i} + 2\hat{k}$$

la magnitud de la aceleración es

$$a(1) = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}\ \text{m/s}^2$$

Ejemplo 11. Una persona que se asoma por la ventana de un edificio alto de oficinas observa lo que sospecha es un ovni. La persona registra la posición del objeto en función del tiempo y determina que está dada por

$$\vec{r}_{(t)} = -5{,}0t\hat{i} + 10{,}0t\hat{j} + (7{,}0t - 3{,}0t^2)\hat{k}$$

a) Obtenga los vectores de: desplazamiento, velocidad y aceleración del objeto en $t = 5{,}0$ s.
b) ¿Hay algún tiempo en que la velocidad del objeto sea cero?
c) ¿La aceleración del objeto es constante o cambia con el tiempo?

Solución.
a) El vector desplazamiento es:

$$\vec{r}_{(t)} = -5{,}0t\hat{i} + 10{,}0t\hat{j} + (7{,}0t - 3{,}0t^2)\hat{k}$$

El vector velocidad es la derivada del vector desplazamiento:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -5{,}0\hat{i} + 10{,}0\hat{j} + [7{,}0 - 2(3{,}0)t]\hat{k}$$

y el vector aceleración es la derivada del vector velocidad:

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -6{,}0\,\hat{k}$$

en $t = 5{,}0$ s:

$$\vec{r}_{(5)} = -5{,}0(5)\hat{i} + 10{,}0(5)\hat{j} + \left[7{,}0(5) - 3{,}0(5)^2\right]\hat{k}$$

$$= -25{,}0\hat{i} + 50{,}0\hat{j} - 40{,}0\hat{k}$$

$$\frac{d^2\vec{r}(5)}{dt^2} = -6{,}0\,\hat{k}$$

b) la velocidad en ambas direcciones x e y es constante y diferente de cero, luego la velocidad nunca puede ser cero
c) La aceleración del objeto es constante, ya que t no aparece en el vector aceleración.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME.
Para que un movimiento sea rectilíneo uniforme su velocidad debe ser constante, es decir, que la aceleración sea siempre igual a cero.

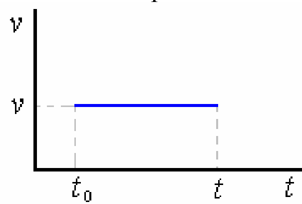
Estudio del Movimiento

Como el movimiento es uniforme $\vec{v}_m = \vec{v}$, y considerando que su trayectoria está en el eje x

$$\vec{v} = v\hat{i} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} = \frac{x - x_0}{t - t_0}\hat{i}$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \tan\alpha$$

Diagrama velocidad-tiempo



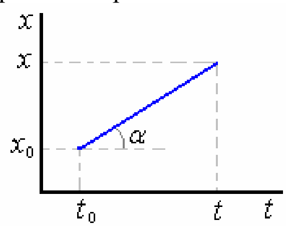
El gráfico velocidad-tiempo del movimiento uniforme es una recta paralela al eje del tiempo.

De $v = \dfrac{x - x_0}{t - t_0} \Rightarrow x = x_0 + v(t - t_0)$

Si el instante inicial $t_0 = 0$, tenemos

$$x = x_0 + vt$$

Diagrama espacio-tiempo



El gráfico indica las posiciones instantáneas del móvil en cada instante

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO.
Para que un movimiento sea rectilíneo uniformemente variado su aceleración debe ser constante y diferente de cero.

Estudio del Movimiento

Como la aceleración es constante, $\vec{a}_m = \vec{a}$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{constante}$$

$$\vec{a} = a\hat{i} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\hat{i}$$

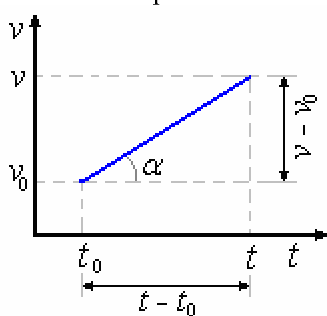
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

$$v - v_0 = a(t - t_0)$$

Si el tiempo inicial $t_0 = 0$

$$v = v_0 + at$$

Diagrama velocidad-tiempo



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \tan\alpha$$

La velocidad media:

Si la posición en t_0 es $\vec{r}_0 = x_0\hat{i}$ y la posición en t es $\vec{r} = x\hat{i}$, la velocidad media en este intervalo es

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

La posición.

De lo anterior:

$$x - x_0 = v_m(t - t_0)$$

y $x = x_0 + v_m(t - t_0)$

Por otra parte como la velocidad es una función lineal, la velocidad media v_m es

$$v_m = \frac{v + v_0}{2}$$

y como $v = v_0 + a(t - t_0)$

resulta

$$v_m = \frac{v_0 + [v_0 + a(t - t_0)]}{2} = v_0 + \frac{a(t - t_0)}{2}$$

finalmente

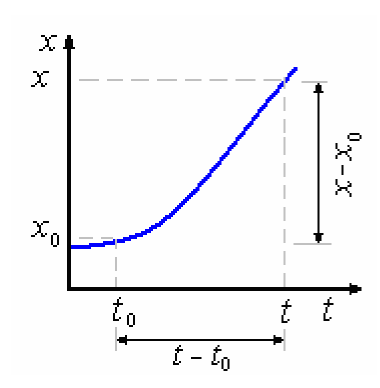
$$x = x_0 + \left[v_0 + \frac{a(t - t_0)}{2}\right](t - t_0)$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

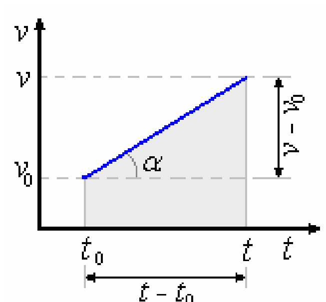
Si el tiempo inicial $t_0 = 0$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Diagrama espacio -tiempo



Ejemplo 12. Demostrar que el área encerrada bajo la curva de la velocidad del diagrama velocidad-tiempo es igual al módulo del desplazamiento $\Delta x = x - x_0$.



Solución.

El área encerrada es igual al área de un trapecio cuyas bases son $b_1 = v$ y $b_2 = v_0$ con altura $h = (t - t_0)$.

$$\text{Area del trapecio} = \frac{(b_1 + b_2)}{2}h$$

$$= \frac{(v + v_0)}{2}(t - t_0)$$

$$= v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}(v - v_0)(t - t_0)$$

Pero como $a = \tan\alpha = \frac{(v - v_0)}{(t - t_0)}$

$$\Rightarrow (v - v_0) = a(t - t_0)$$

Luego

$$\text{Area del trapecio} = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Valor que precisamente corresponde al desplazamiento $\Delta x = x - x_0$.

LA ECUACIÓN DE TORRICELLI.

Podemos obtener una relación muy útil eliminando el tiempo como variable en la ecuación

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Como $a = \frac{(v - v_0)}{(t - t_0)} \Rightarrow (t - t_0) = \frac{(v - v_0)}{a}$

Sustituyendo

$$x = x_0 + v_0 \frac{(v - v_0)}{a} + \frac{1}{2} a \frac{(v - v_0)^2}{a^2}$$

De donde se puede despejar:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Conocida como la ecuación de Torricheli.

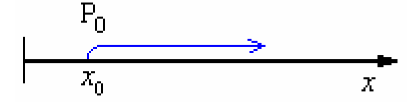
Descripción del movimiento de una partícula con aceleración constante.

Consideramos una aceleración constante $a > 0$ en el sentido positivo de la trayectoria.

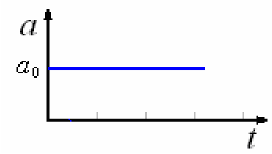
1er Caso:

La partícula tiene una velocidad inicial $v_0 \geq 0$.

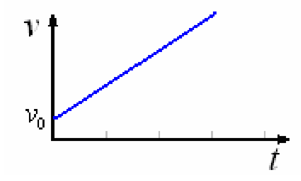
La partícula se desplaza de P_0 al infinito con un sentido constante y aumentando su velocidad.



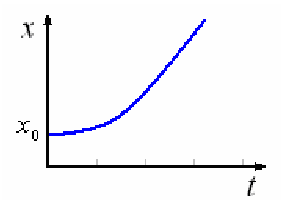
Los diagramas aceleración-tiempo, velocidad-tiempo y espacio-tiempo correspondientes son los siguientes:



$a_0 = \text{constante}$



$v = v_0 + at$

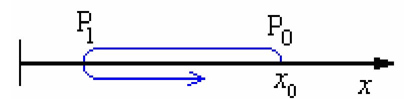


$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

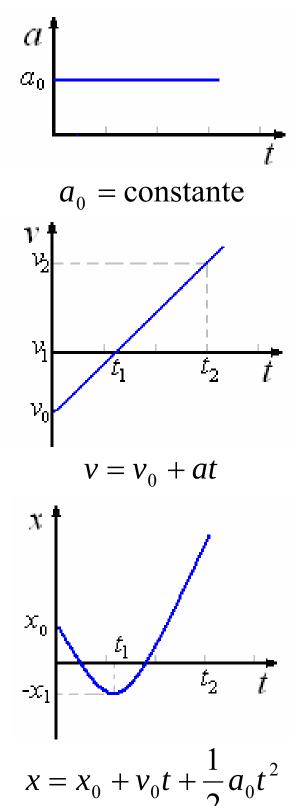
2do. Caso:

La partícula tiene una velocidad inicial $v_0 < 0$.

La partícula se desplaza de P_0 en sentido negativo con movimiento retardado (desacelerado) hasta detenerse en P_1 y cambia de sentido. A partir de ese instante la velocidad aumenta constantemente (acelerado) y se desplaza al infinito con un sentido constante.



Los diagramas aceleración-tiempo, velocidad-tiempo y espacio-tiempo correspondientes son los siguientes:



$a_0 = \text{constante}$

$v = v_0 + at$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

Ejemplo 13. Una tortuga camina en línea recta sobre lo que llamaremos eje *x* con la dirección positiva hacia la derecha. La ecuación de la posición de la tortuga en función del tiempo es $x_{(t)} = 50{,}0 \text{ cm} + (2{,}00 \text{ cm/s})t - (0{,}0625 \text{ cm/s}^2)t^2$.

a) Determine la velocidad inicial, posición inicial y aceleración inicial de la tortuga.

b) ¿En qué instante *t* la tortuga tiene velocidad cero?

c) ¿Cuánto tiempo después de ponerse en marcha regresa la tortuga al punto de partida?

d) ¿En qué instantes *t* la tortuga está a una distancia de 10,0 m de su punto de partida? ¿Que velocidad (magnitud y dirección) tiene la tortuga en cada uno de esos instantes?

e) Dibuje las gráficas: *x*-*t*, v_x-*t* y a_x-*t* para el intervalo de $t = 0$ a $t = 40{,}0$ s.

Solución.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2{,}00 \text{ cm/s} - (0{,}125 \text{ cm/s}^2)t$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -0{,}125 \text{ cm/s}^2$$

a) En $t = 0, x = 50{,}0 \text{cm}, v_x = 2{,}00 \text{cm/s}$, $a_x = -0{,}125 \text{cm/s}^2$.

b) Hagamos $v_x = 0$ y resolvamos para *t*:

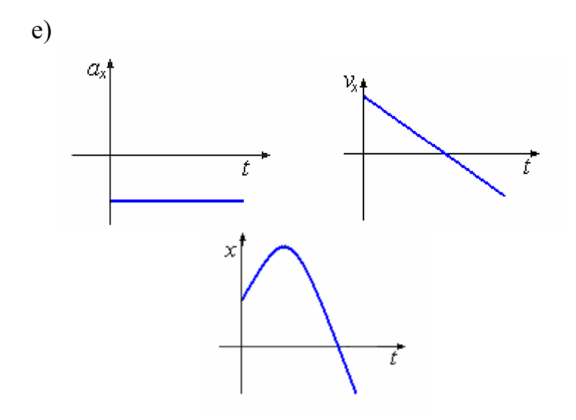
$t = 16{,}0$ s

c) Hagamos $x = 50{,}0$ cm y resolvamos para *t*.
Esto da: $t = 0$ y $t = 32{,}0\text{ s}$.
La tortuga regresa al punto de partida después de 32,0 s.
d) La tortuga está a 10,0 cm del punto de partida cuando $x = 60{,}0$ cm o $x = 40{,}0$ cm.
Hagamos $x = 60{,}0$ cm y resolvamos para *t*:
$t = 6{,}20$ s y $t = 25{,}8$ s
En $t = 6{,}20$ s, $v_x = +\,1{,}23$ cm/s.
En $t = 25{,}8$ s, $v_x = -\,1{,}23$ cm/s.
Hagamos $x = 40{,}0\text{ cm}$ y resolvamos para t:

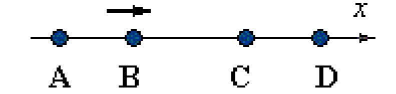
$$t = 36{,}4\text{ s}$$

(la otra raíz de la ecuación cuadrática es negativa y por lo tanto sin significado físico).
En $t = 36{,}4$ s, $v_x = -\,2{,}55$ cm/s.

e)



Ejemplo 14. Un móvil parte del reposo y de un punto A, con movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado (a =10 cm/s^2); tarda en recorrer una distancia BC = 105 cm un tiempo de 3 s, y, finalmente, llega al punto D (CD = 55 cm).
Calcular:
a) La velocidad del móvil en los puntos B, C y D.
b) La distancia AB.
c) El tiempo invertido en el recorrido AB y en el CD.
d) El tiempo total en el recorrido AD.



Solución.
a)

$$\left.\begin{array}{l} BC = v_B t + \frac{1}{2}at^2 \\ 105 = v_B 3 + \frac{1}{2}10\times 3^2 \end{array}\right\} \Rightarrow v_B = 20 \text{ cm/s}$$

$$v_C = v_B + at = 20 + 30 = 50 \text{ cm/s}$$

$$\left.\begin{array}{l} CD = v_C t + \frac{1}{2}at^2 \\ 55 = 50t + \frac{1}{2}10t^2 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow t^2 + 10t - 11 = 0 \Rightarrow t = 1$ s

$$v_D = v_C + at = 50 + 10 = 60 \text{ cm/s}$$

b) $v_B = \sqrt{2aAB}$

$$\Rightarrow AB = \frac{v_B^2}{2a} = \frac{400}{20} = 20\text{cm}$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} v_B = at \\ 20 = 10t \end{array}\right\} \Rightarrow t = \frac{20}{10} = 2 \text{ s}$$

d) Será la suma de los tiempos parciales:
$t = 2 + 3 + 1 = 6$ s

MOVIMIENTO VERTICAL CON ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD.

La variación de la magnitud de la aceleración g_ϕ debido a la gravedad en la superficie de la tierra con la latitud está dada por la fórmula internacional de la gravedad adoptada en 1930 por el Congreso Geofísico Internacional:

$$g_\phi = 978{,}049000\,(1 + 0{,}0052884 \text{ sen}^2 \phi - 0{,}0000059 \text{ sen}^2 2\phi)$$

g en cm/s^2, ϕ en grados
Donde ϕ es la latitud de la tierra medida en el ecuador
Para ϕ = 0º (ecuador), g_0 = 978,0490
Para ϕ = 90º (polos), g_{90} = 983,2213

La variación de la aceleración gravitacional con la altura sobre el nivel del mar es aproximadamente

$$g = g_\phi - 0{,}000002860h$$

h en metros y g_ϕ en m/s^2
Donde $h \leq$ 40 000 m

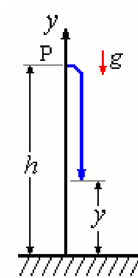
Cerca de la superficie de la tierra la magnitud de la aceleración debido a la gravedad varía muy poco con la altura y en los cálculos técnicos ordinarios se toma g = 9,81 m/s^2 (dirigido verticalmente hacia abajo).

Un cuerpo que se deja caer está sometido a la aceleración de la gravedad y su movimiento corresponde a un movimiento rectilíneo uniformemente variado en el eje vertical perpendicular a la tierra,

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v = v_0 + at$$
$$a = -g$$

a) Caída libre



Si se deja caer un cuerpo desde una altura *h* sobre el nivel del piso y consideramos despreciable la resistencia del aire.

En este caso $y_0 = h$, $v_0 = 0$, luego:

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = -gt$$

$$a = -g$$

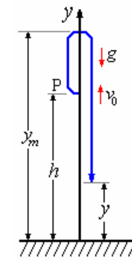
El cuerpo toca tierra cuando $y = 0$

Luego $h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

y la velocidad es $v = \sqrt{2gh}$

b) Lanzamiento hacia arriba

Si el mismo cuerpo desde la misma altura *h* se lanza hacia arriba con velocidad v_0, se mueve con un movimiento rectilíneo uniformemente retardado (desacelerado).



$$y = h + v_0 t + -\frac{1}{2}gt^2$$

$$v = v_0 - gt$$

$$a = -g$$

El cuerpo sube hasta que alcanza la altura máxima y_m. Esta corresponde a cuando la velocidad disminuye a cero.

$$v_0 - gt = 0 \Rightarrow t_m = \frac{v_0}{g}$$

De aquí $y_m = h + v_0\left(\frac{v_0}{g}\right) + -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2$

$$= h + \frac{v_0^2}{2}$$

Cuando el cuerpo pasa por el punto de lanzamiento $y = h$

$$h = h + v_0 t + -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t_P = \frac{2v_0}{g} \text{ y por}$$

supuesto $t_P = 0$, que corresponde al tiempo inicial.

Observamos que $t_P = 2t_m$

La velocidad es

$$v_P = v_0 - g\left(\frac{2v_0}{g}\right) = v_0 - 2v_0 = -v_0$$

Finalmente toca piso cuando $y = 0$

$$h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t^2 - \frac{2v_0}{g}t - \frac{2h}{g} = 0$$

cuya solución es

$$t = \frac{v_0}{g} \pm \frac{\sqrt{v_0^2 + 2h}}{g}$$

toca el piso al tiempo

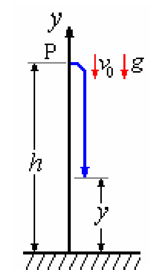
$$t = \frac{v_0}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 + 2h}}{g}$$

con una velocidad

$$v = -\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

c) Lanzamiento hacia abajo

Si el mismo cuerpo desde la misma altura *h* se lanza hacia abajo con una velocidad v_0, el cuerpo se mueve en un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.



$$y = h - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = -v_0 - gt$$

$$a = -g$$

El cuerpo alcanza el piso cuando $y = 0$.

$$h - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t^2 + \frac{2v_0}{g}t - \frac{2h}{g} = 0$$

cuya solución es

$$t = -\frac{v_0}{g} \pm \frac{\sqrt{v_0^2 + 2h}}{g}$$

toca el piso al tiempo

$$t = -\frac{v_0}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 + 2h}}{g}$$

con una velocidad

$$v = -\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Ejemplo 15. Desde lo alto de un edificio, se lanza verticalmente hacia arriba una pelota con una rapidez de 12,5 m/s. La pelota llega a tierra 4,25 s, después. Determine:
a) La altura que alcanzó la pelota respecto del edificio.
b) La rapidez de la pelota al llegar al suelo.
Solución.
La altura en función del tiempo será

$$y = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Con $g = 10\text{m/s}^2$, $v_0 = 12,5$ m/s
$y = h + 12,5t - 5t^2$
a) Al tiempo $t = 4,25$ s, $y = 0$, luego:
$h + 12,5(4,25) - 5(4,25)^2 = 0$,
$\Rightarrow h = 37,19$ m
b) $v_y = 12,5 - 10t = 12,5 - 10(4,25)$
$= -30,0$ m/s

Ejemplo 16. Se deja caer un cuerpo desde una altura de $y_0 = 33$ m, y simultáneamente se lanza hacia abajo otro cuerpo con una rapidez inicial de 1 m/s. Encontrar el instante en que la distancia entre ellos es de 18 m.
Solución.
$y_1 = 33 - 5t^2$
$y_2 = 33 - t - 5t^2$
$y_1 - y_2 = t$
Entonces la distancia entre ellos es 18m a los 18 s

Ejemplo 17. Un cuerpo que cae, recorre en el último segundo 68,3 m. Encontrar La altura desde donde cae.
Solución. Suponiendo que se soltó del reposo
$y = h - 5t^2$

El tiempo en que llega al suelo es $t = \sqrt{\frac{h}{5}}$

La distancia recorrida en el último segundo será

$$y\left(\sqrt{\frac{h}{5}} - 1\right) - y\left(\sqrt{\frac{h}{5}}\right) =$$

$$5\left(\sqrt{\frac{h}{5}}\right)^2 - 5\left(\sqrt{\frac{h}{5}} - 1\right)^2 = 68,2$$

$\Rightarrow h = 268,6$ m

Ejemplo 18. Desde lo alto de un acantilado, se deja caer una piedra, desde la misma altura se lanza una segunda piedra 2 s más tarde con una rapidez de 30 m/s. Si ambas golpean el piso simultáneamente. Encuentre: La altura del acantilado.
Solución.
$y_1 = h - 5t^2$
$y_2 = h - 30(t - 2) - 5(t - 2)^2$
Siendo al mismo tiempo
$y_1 = h - 5t^2 = 0$
$y_2 = h - 30(t - 2) - 5(t - 2)^2 = 0$
De aquí $t = 4$ s;
$h = 80$m

Ejemplo 19. Desde el piso, se lanza hacia arriba una pelota con una rapidez de 40 m/s. Calcule:
a) El tiempo transcurrido entre los dos instantes en que su velocidad tiene una magnitud de 2,5 m/s.
b) La distancia respecto al piso que se encuentra la pelota en ese instante.
Solución.

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1)$$

$$v_y = v_0 - gt \quad (2)$$

a) De la ecuación (2):

$$v_y = v_0 - gt_1 = 2,5$$

$$v_y = v_0 - gt_2 = -2,5$$

Restando obtenemos:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{5}{g} = 0,5s$$

b) De la ecuación (2):

$$v_y = v_0 - gt_1 = 2,5$$

$$40 - gt_1 = 2,5$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{37,5}{9,8} = 3,83 \text{ s.}$$

Con t_1 en (1):

$$h = 40(3,83) - \frac{1}{2} g (3,83)^2 = 81,41 \text{ m.}$$

Con t_2 se obtiene la misma altura, porque es cuando la pelota está de bajada.

Ejemplo 20. Una roca cae libremente recorriendo la segunda mitad de la distancia de caída en 3(s). Encuentre
a) la altura desde la cual se soltó.
b) El tiempo total de caída.
Solución.

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

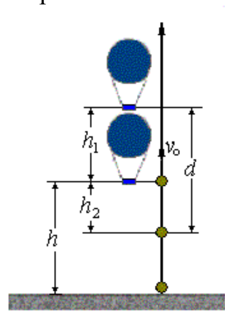
El tiempo en que alcanza $h/2$ es $t_1 = \sqrt{\frac{h}{g}}$ y el tiempo en que $h = 0$ es $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

a) por lo tanto el tiempo empleado en la segunda parte de recorrido es

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{h}{g}} = 3 \Rightarrow h = 524,6 \text{ m}$$

b) $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{524,6}{5}} = 10,2$ s

Ejemplo 21. Se deja caer una piedra desde un globo que asciende con una velocidad de 3 m/s; si llega al suelo a los 3 s, calcular:
a) Altura a que se encontraba el globo cuando se soltó la piedra.
b) Distancia globo-piedra a los 2 s del lanzamiento.



Solución. Tomaremos el origen de coordenadas en el punto en que se suelta la piedra. Magnitudes positivas son las que tienen dirección hacia arriba.
a)

$$\left.\begin{array}{l} v_0 = 3\text{m/s} \\ g \approx 10\text{m/s}^2 \\ t = 3\text{s} \end{array}\right\} \; y = h + 3t - \frac{1}{2}10t^2$$

Cuando la piedra toca suelo, $y = 0$
Luego

$$h = 3(3) - \frac{1}{2}10(3)^2$$
$$= 36 \text{ m}$$

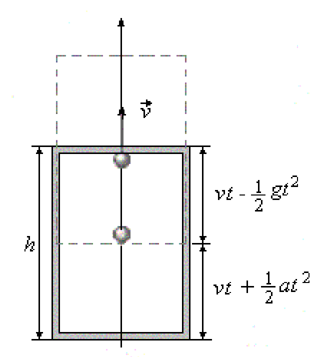
b)
$t' = 2$ s.

h_1: distancia al origen del globo en t'.
h_2: distancia al origen de la piedra en t'.

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = v_0 t' = 3\times 2 = 6m \\ h_2 = v_0 t' + \frac{1}{2}gt'^2 = 3\times 2 - \frac{1}{2}10\times 40 - 14m \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \; d = 6 + 14$
$= 20$ m

Ejemplo 22. La cabina de un ascensor de altura 3 m asciende con una aceleración de 1 m/s^2. Cuando el ascensor se encuentra a una cierta altura del suelo, se desprende la lámpara del techo. Calcular el tiempo que tarda la lámpara en chocar con el suelo del ascensor.



Solución.
Primer método:
En el instante en que empieza a caer el cuerpo el ascensor lleva una velocidad vertical hacia arriba v.

El espacio vertical y hacia abajo que debe recorrer la lámpara es:

$$h - \left(vt + \frac{1}{2}at^2\right)$$

(h = altura del ascensor) y ($vt + at^2/2$) ascenso del suelo de éste. La lámpara al desprenderse lleva una velocidad inicial hacia arriba v. Aplicando la ecuación:

$$s = vt + \frac{1}{2}at^2$$

Siendo positivas las magnitudes hacia arriba y negativas las descendentes, tendremos:

$$-h + vt + \frac{1}{2}at^2 = vt - \frac{1}{2}gt^2 \;\Rightarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = \sqrt{\frac{2\times 3}{9{,}8+1}} = 0{,}74 \text{ s}$$

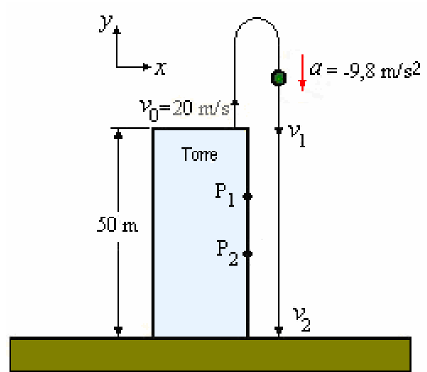
Segundo método:
La aceleración de la lámpara respecto al ascensor, considerando magnitudes positivas hacia abajo, es:
$a_{BA} = a_B - a_A = 9{,}8 - (-1) = 10{,}8$ m/s^2

$$h = \frac{1}{2}a_{BA}t^2 \;\Rightarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_{BA}}} = \sqrt{\frac{2\times 3}{10{,}8}} = 0{,}74 \text{ s}$$

Ejemplo 23. Una bola es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s de la parte alta de una torre que tiene una altura de 50 m. En su vuelta pasa rozando la torre y finalmente toca la tierra.
a) ¿Qué tiempo t_1 transcurre a partir del instante en que la bola fue lanzada hasta que pasa por el borde de la torre? ¿Qué velocidad v_1 tiene en este tiempo?
b) ¿Qué tiempo total t_2 se requiere para que la bola llegue al piso? ¿Cuál es la velocidad v_2, con la que toca el piso?

c) ¿Cuál es la máxima altura sobre el suelo alcanzada por la bola?
d) Los puntos P_1 y P_2 están a 15 y 30 m, respectivamente, por debajo del techo de la torre. ¿Qué tiempo se requiere para que la bola viaje de P_1 a P_2?
e) ¿Se desea que después de pasar el borde, la bola alcance la tierra en 3s, ¿con qué velocidad se debe lanzar hacia arriba de la azotea?



Solución.
a) Para el sistema de coordenadas mostrado en la figura, $y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.
Pero en el borde del techo $y = 0$, luego
$$0 = v_0 t_1 + \frac{1}{2}at_1^2,$$
De la cual $t_1 = 0$, indica el instante en el cual la bola es lanzada, y también $t_1 = 4{,}08$ s, la cual es el tiempo en que la bola retorna al borde.
Luego, de $v = v_0 + at$
$v_1 = 20 + (-9{,}8)(4{,}08) = -20\text{m/s}$, que es el negativo de la velocidad inicial.
b) $-50 = 20t_2 + \frac{1}{2}(-9{,}8)t_2^2 \Rightarrow t_2 = 5{,}8\text{ s}$
$v_2 = 20 + (-9{,}8)(5{,}8) = -37\text{m/s}$
c) Máxima altura sobre tierra: $h = y_{max} + 50$.
De $v_0^2 + 2ay_{max} = 0$, $\Rightarrow$
$$y_{max} = \frac{-(20)^2}{-2(9{,}8)} = 20{,}4\text{ m}$$
Luego, $h = 70{,}4$ m.
d) Si t_1 y t_2 son los tiempos para alcanzar P_1 y P_2, respectivamente,
$$-15 = 20t_1 - 4{,}9t_1^2 \text{ y } -30 = 20t_2 - 4{,}9t_2^2$$
Resolviendo, $t_1 = 4{,}723$ s, $t_2 = 5{,}248$ s, y el tiempo de P_1 a P_2 es $(t_2 - t_1) = 0{,}525$ s.
e) Si v_0 es la velocidad inicial deseada, entonces $-v_0$ es la velocidad cuando pasa el borde. Luego aplicando $y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ al viaje hacia abajo de la torre, encontramos:
$-50 = (-v_0)(3) - 4{,}9(3)^2$, $\Rightarrow v_0 = 1{,}96$ m/s.

Ejemplo 24. Una maceta con flores cae del borde de una ventana y pasa frente a la ventana de abajo. Se puede despreciar la resistencia del aire. La maceta tarda 0,420 s en pasar por esta ventana, cuya altura es de 1,90 m. ¿A qué distancia debajo del punto desde el cual cayó la maceta está el borde superior de la ventana de abajo?
Solución.
Si la velocidad de la maceta en la parte superior de la ventana es v_0, podemos encontrarla en función de la altura h de la ventana y el tiempo que tarda en pasarla::
$$h = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow v_0 = \frac{2h - gt^2}{2t}$$
Luego: $v_0 = \frac{2(1{,}90) - (9{,}8)(0{,}42)^2}{2(0{,}42)} = 2{,}47\frac{\text{m}}{\text{s}}$
La distancia y desde la azotea al borde superior de la ventana es:
$$y = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{2{,}47^2}{2(9{,}8)} = 0{,}311\text{ m}$$
Otra forma de encontrar la distancia es: como $t = 0{,}420$ s es la diferencia entre los tiempos tomados en caer la las alturas $(y + h)$ e y, tenemos
$$t = \sqrt{\frac{2(y+h)}{g}} - \sqrt{\frac{2y}{g}} \Rightarrow$$
$$\sqrt{\frac{gt^2}{2}} + \sqrt{y} = \sqrt{y+h}$$
Elevando al cuadrado:
$$\frac{gt^2}{2} + \sqrt{2gyt^2} + y = y + h$$
$$\Rightarrow \frac{gt^2}{2} + \sqrt{2gyt^2} = h$$
Resolviendo para y:
$$y = \frac{1}{2g}\left(\frac{2h - gt^2}{2t}\right)^2$$
Con los datos
$$y = \frac{1}{2(9{,}8)}\left[\frac{2(1{,}9) - (9{,}8)(0{,}42)^2}{2(0{,}42)}\right]^2 = 0{,}311\text{ m}$$

Ejemplo 25. Malabarismo. Un malabarista actúa en un recinto cuyo cielorraso está 3,0 m arriba del nivel de las manos. Lanza una pelota hacia arriba de modo que apenas llega al techo.
a) ¿Qué velocidad inicial tiene la pelota?
b) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar al techo?
En el instante en que la primera pelota está en el cielorraso, el malabarista lanza una segunda pelota hacia arriba con dos terceras parte de la velocidad inicial de la primera.

c) ¿Cuánto tiempo después de lanzada la segunda pelota se cruzan las dos pelotas en el aire? d) ¿A qué altura sobre la mano del malabarista se cruzan las dos pelotas

Solución.

a) Tomemos el sentido positivo hacia arriba.

Tenemos que $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$

En el cielorraso, $v_y = 0$, $y - y_0 = 3{,}0\ \text{m}$.

Luego: $0 = v_{0y}^2 - 2(9{,}8)(3) \Rightarrow v_{0y} = 7{,}7\ \text{m/s}$.

b) También tenemos:

$v_y = v_{0y} - gt = 0 = 7{,}7 - 9{,}8t$

$\Rightarrow t = 0{,}78\ \text{s}$.

c) Tomemos el sentido positivo hacia abajo.

La primera bola viaja hacia abajo una distancia d en el tiempo t. Como comienza desde su máxima altura, $v_{0y} = 0$.

$$d = v_{0y}t + \tfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow d = (4{,}9\ \text{m/s}^2)t^2$$

La segunda bola tiene

$v'_{0y} = \tfrac{1}{3}(7{,}7\ \text{m/s}) = 5{,}1\ \text{m/s}$.

En el tiempo t habrá viajado hacia arriba $(3{,}0\ \text{m} - d)$ y estará en el mismo lugar que la primera bola. $(3 - d) = v'_{0y}\,t - \tfrac{1}{2}gt^2$

$(3 - d) = 5{,}1t - 4{,}9t^2$

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviéndolas obtenemos:

$t = 0{,}59\ \text{s}$ y $d = 1{,}7\ \text{m}$.

d) $3{,}0\ \text{m} - d = 1{,}3\ \text{m}$

Ejemplo 26. Una manzana cae libremente de un árbol, estando originalmente en reposo a una altura *H* sobre un césped crecido cuyas hojas miden *h*. Cuando la manzana llega al césped, se frena con razón constante de modo que su rapidez es 0 al llegar al suelo,

a) Obtenga la rapidez de la manzana justo antes de tocar el césped.

b) Obtenga la aceleración de la manzana ya dentro del césped.

c) Dibuje las gráficas: *v-t* y *a-t* para el movimiento de la manzana.

Solución.

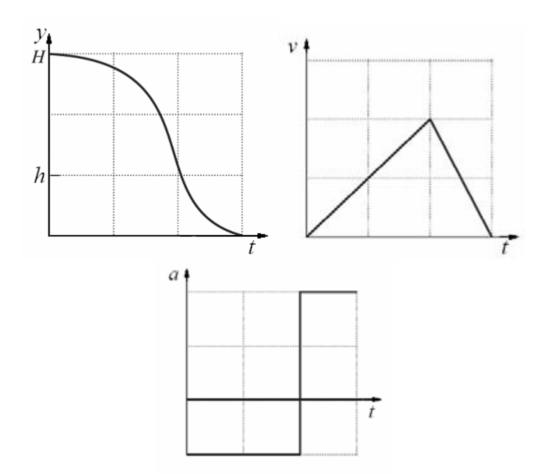
a) La rapidez de un objeto que cae una distancia H en caída libre una distancia $H - h$ es:

$v = \sqrt{2g(H - h)}$.

b) La aceleración para llevar a un objeto desde la rapidez v al reposo sobre una distancia h es:

$$a = \frac{v^2}{2h} = \frac{2g(H - h)}{2h} = g\left(\frac{H}{h} - 1\right).$$

c)



Ejemplo 27. En el salto vertical, un atleta se agazapa y salta hacia arriba tratando de alcanzar la mayor altura posible. Ni los campeones pasan mucho más de 1,00 s en el aire ("tiempo de suspensión"). Trate al atleta como partícula y sea $y_{máx}$ su altura máxima sobre el suelo. Para explicar por qué parece estar suspendido en el aire, calcule la razón del tiempo que está sobre $y_{máx}/2$ al tiempo que tarda en llegar del suelo a esa altura. Desprecie la resistencia del aire.

Solución.

El tiempo al caer para alcanzar $y_{máx}$ es:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2y_{máx}}{g}} = 1\ \text{s}.$$

El tiempo al caer para alcanzar $y_{máx}/2$ es:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2y_{máx}/2}{g}} = \sqrt{\frac{y_{máx}}{g}} = \frac{t_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{s}.$$

El tiempo debajo de $y_{máx}/2$ es $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, de tal manera que la razón entre el tiempo que está sobre la mitad de la altura máxima y el tiempo que está por debajo de la altura máxima es.

$$\frac{1/\sqrt{2}}{1 - 1/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 2{,}4.$$

Esto explica porque el atleta parece estar suspendido en el aire.

Ejemplo 28. Un excursionista despierto ve caer un peñasco desde un risco lejano y observa que tarda 1,30 s en caer el último tercio de la distancia. Puede despreciarse la resistencia del aire.

a) ¿Qué altura (en m) tiene el risco?

b) Si en (a) obtiene dos soluciones de una ecuación cuadrática y usa una para su respuesta, ¿qué representa la otra?

Solución.

a) Sea h la altura y toma un tiempo t en caer:

$h = \tfrac{1}{2}gt^2$

Si tarda 1,30 s en caer el último tercio h :

$$\frac{2}{3}h = \frac{1}{2}g(t-1,3)^2$$

Eliminando h de estas dos ecuaciones obtenemos:

$$\frac{1}{3}gt^2 = \frac{1}{2}g(t-1,3)^2$$

$$t^2 - 7,8t + 5,07 = 0$$

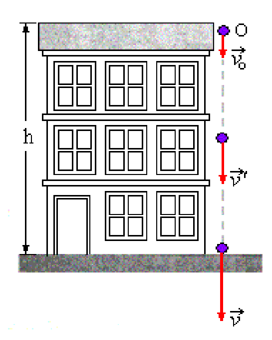
Resolviendo $t = 3,9 \pm 3,18 \begin{cases} t_1 = 7,08s \\ t_2 = 0,73s \end{cases}$

La primera es la solución correcta porque es mayor que 1,30 s,

$$h = \frac{1}{2}(9,8)(7,08)^2 = 245,6 \text{ m}$$

b) Con la segunda solución para t encontramos h = 2,6 m. Esto correspondería a un objeto que estaba inicialmente cerca del fondo de este "acantilado" que era lanzado hacia arriba y tomando 1,30 s la subida a la cima y la caída al fondo. Aunque físicamente es posible, las condiciones del problema imposibilitan esta respuesta.

Ejemplo 29. Desde la cornisa de un edificio de 60 m de alto se lanza verticalmente hacia abajo un proyectil con una velocidad de 10 m/s. Calcular:
a) Velocidad con que llega al suelo.
b) Tiempo que tarda en llegar al suelo.
c) Velocidad cuando se encuentra en la mitad de su recorrido.
d) Tiempo que tarda en alcanzar la velocidad del apartado c).



Solución.
Tomamos corno origen de coordenadas el punto de lanzamiento y como sentido positivo el del eje vertical descendente. Las ecuaciones de este movimiento serán:

$$v = v_0 + gt \qquad v_0 = 10 \text{ m/s}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \qquad g \approx 10\text{m/s}^2$$

a) y b) $h = 60$ m

$$v = 10 + 10t$$

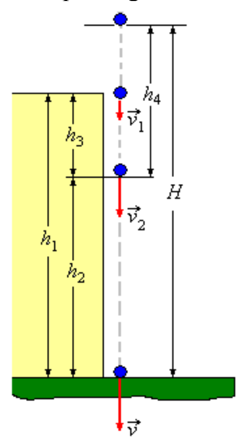
$$60 = 10t + \frac{1}{2}10t^2 \Rightarrow \begin{matrix} t = 2,6 \text{ s} \\ v = 36\text{m/s} \end{matrix}$$

c) y d) $h' = 30$ m

$$v' = 10 + 10t'$$

$$30 = 10t' + \frac{1}{2}10t'^2 \Rightarrow \begin{matrix} t' = 1,65 \text{ s} \\ v' = 26,5\text{m/s} \end{matrix}$$

Ejemplo 30. Una piedra que cae libremente pasa a las 10 horas frente a un observador situado a 300 m sobre el suelo, y a las 10 horas 2 segundos frente a un observador situado a 200 m sobre el suelo. Se pide calcular:
a) La altura desde la que cae.
b) En qué momento llegará al suelo.
c) La velocidad con que llegará al suelo.



Solución.

$$h_1 = 300m$$

$$h_2 = 200m \qquad t_1 = 2 \text{ s}$$

$$h_3 = 100m \qquad g \approx 10\text{m/s}^2$$

a)

$$v_2 = v_1 + gt_1 \Rightarrow v_2 = v_1 + 10 \times 2$$

$$h_3 = v_1 t_1 + \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow 100 = 2v_1 + \frac{1}{2}10 \times 4$$

$$h_4 = \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow h_4 = \frac{v_2^2}{2 \times 10}$$

$$H = h_2 + h_4$$

De aquí se obtiene $\begin{cases} v_1 = 40\text{m/s} \\ v_2 = 60\text{m/s}, \\ h_4 = 180\text{m} \end{cases}$

Finalmente $H = 200 + 180 = 380\text{m}$

b) Llamando t_2 al tiempo que tarda en recorrer h_1:

$$h_1 = v_1 t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2$$

$$\Rightarrow 300 = 40t_2 + \frac{1}{2}10t_2^2$$

$$\Rightarrow t_2 = 5s$$

Luego llega al suelo a las 10 horas 5 segundos

c) $v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \times 10 \times 380}$ = 87 m/s

PROBLEMA INVERSO - CÁLCULO INTEGRAL

Conociendo la ley del movimiento $x = x(t)$ es posible sin mayores dificultades calcular $v(t)$ y $a(t)$ tal como fue mostrado

$$x(t) \Rightarrow v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Como hemos visto, el cálculo diferencial proporciona la herramienta para determinar la velocidad y aceleración en cualquier instante del tiempo.

En esta sección veremos cómo el cálculo integral, que es el inverso del cálculo diferencial, puede utilizarse para deducir las fórmulas que ya hemos visto. Por ejemplo, hallar la posición de una partícula en un instante cualquiera, dado su velocidad inicial y su aceleración conocida.

Ya hemos demostramos que el área encerrada bajo la curva de la velocidad del diagrama velocidad-tiempo es igual al desplazamiento.

$$\text{Area del trapecio} = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

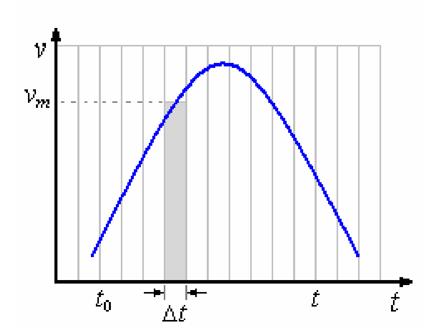
$$x - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

En el caso de un movimiento con velocidad constante el desplazamiento entre los tiempos t y t_0 es

$$x - x_0 = v_0(t - t_0)$$

o $\Delta x = v_0(t - t_0)$

Para un movimiento cualquiera con aceleración variable el diagrama velocidad-tiempo será el mostrado en la figura siguiente



Si descomponemos el tiempo total desde t_0 hasta t en segmentos pequeños Δt, entonces cada tramo vertical que baja desde la curva de velocidades hasta el eje de absisas tiene un área

$$\Delta A = v_m \Delta t$$

Donde v_m es la velocidad media del intervalo. Esta área corresponde al desplazamiento en ese intervalo que como se puede observar el área faltante se complementa con el excedente del otro lado.

El desplazamiento total para el intervalo $(t - t_0)$ es la suma de todas las áreas de todos los rectángulos de tal modo que:

$$\Delta x = \sum_i v_m(t_i)\Delta t$$

La regla para los tiempos es que $t_{i+1} = t_i + \Delta t$.

La distancia que obtenemos con este método no será la correcta porque la velocidad cambia durante el tiempo del intervalo Δt .

Si tomamos los intervalos muy pequeños la suma tiene mayor precisión. Así es que los hacemos tan pequeños a fin de tener una buena aproximación. Obtendremos la distancia real en el límite:

$$\Delta x = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i v(t_i)\Delta t$$

Obsérvese que hemos reemplazado la velocidad promedio v_m por la velocidad instantánea v, porque en el límite esta aproximación es válida.

Los matemáticos han inventado un símbolo para este límite, análogo al símbolo para la diferencial. El símbolo Δ se convierte en d , $v(t_i)$ se llama $v(t)$ y el símbolo sumatoria $\sum$ se escribe como una "s" grande $\int$ la cual se conoce el signo integral Luego escribimos

$$\Delta x = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

El proceso de integración es el inverso del proceso de derivación. Con un diferencial obtenemos una fórmula integral si la invertimos.

Ejemplo 31. Encontrar la velocidad de un móvil a partir de la aceleración.

Solución.

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} adt = a\int_{t_0}^{t} dt$$

Integrando obtenemos

$$v - v_0 = a(t - t_0) \Rightarrow v = v_0 + a(t - t_0)$$

Para encontrar la posición

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} vdt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]dt$$

Integrando obtenemos

$$x - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

También se puede encontrar la ecuación del movimiento expresando la integral de la siguiente manera:

$v = \int a dt + C_1$, $x = \int v dt + C_2$

Los valores de C_1 y C_2 dependen de las condiciones iniciales del movimiento.

Pequeña Tabla de Integrales
$\int dx = x$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (n \neq -1)$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x$
$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$
$\int \text{sen}(ax) = \frac{\cos(ax)}{a}$
$\int (u+v) dx = \int u dx + \int v dx$

Ejemplo 32. Encontrar las ecuaciones del movimiento para una partícula que se mueve con aceleración constante $\vec{a} = a\hat{i}$ y que para el tiempo inicial t_0 se encontraba en $\vec{r}_0 = x_0\hat{i}$ y tenía una velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_0\hat{i}$.

Solución.

El movimiento es en el eje x.

La aceleración es $a = \frac{dv}{dt}$

La velocidad se puede encontrar en términos de una integral como

$v = \int a dt + C_1 \Rightarrow v = at + C_1$

Como para $t = t_0$ se tiene $v = v_0$, tenemos

$v_0 = at_0 + C_1 \Rightarrow C_1 = v_0 - at_0$

Reemplazando el valor de C_1 obtendremos la ecuación de la velocidad:

$v = v_0 + a(t - t_0)$

Ahora consideremos la definición de la velocidad

$v = \frac{dx}{dt}$

También se puede escribir en forma integral

$x = \int v dt + C_2$

Reemplazando el valor de v:

$x = \int [v_0 + a(t - t_0)] dt + C_2$

Integrando:

$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 - at_0 t + C_2$

Como para $t = t_0$ se tiene $x = x_0$, tenemos

$x_0 = v_0 t_0 + \frac{1}{2}at_0^2 - at_0^2 + C_2$

$\Rightarrow C_2 = x_0 - v_0 t_0 + \frac{1}{2}at_0^2$

Reemplazando el valor de C_2 obtenemos

$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 - at_0 t + \left(x_0 - v_0 t_0 + \frac{1}{2}at_0^2\right)$

$\Rightarrow x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$

Ejemplo 33. La aceleración de una motocicleta está dada por $a(t) = 1{,}5t - 0{,}12t^2$, con t en s m/s^3. La moto está en reposo en el origen en $t = 0$.

a) Obtenga su posición y velocidad en función de t.

b) Calcule la velocidad máxima que alcanza.

Solución.

a) Para encontrar $v(t)$.

$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt = (1{,}5t - 0{,}12t^2)dt$

Integrando con $v_0 = 0$ y $t_0 = 0$:

$v = \int_0^t (1{,}5t - 0{,}12t^2)dt = 0{,}75t^2 - 0{,}40t^3$

Para encontrar $x(t)$.

$v = \frac{dx}{dt} = 0{,}75t^2 - 0{,}40t^3$

$\Rightarrow dx = (0{,}75t^2 - 0{,}40t^3)dt$

Integrando con $x_0 = 0$ y $t_0 = 0$:

$x = \int_0^t (0{,}75t^2 - 0{,}40t^3)dt = 0{,}25t^3 - 0{,}10t^4$

b) Para que la velocidad sea máxima la aceleración debe ser cero,

$a(t) = 1{,}5t - 0{,}12t^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{1{,}5}{0{,}12} = 12{,}5s \end{cases}$

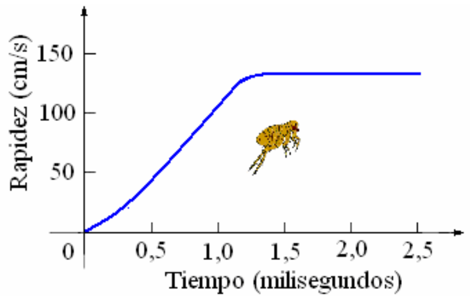
Para $t = 0$ la velocidad es mínima

Para $t = 12{,}5$ la velocidad

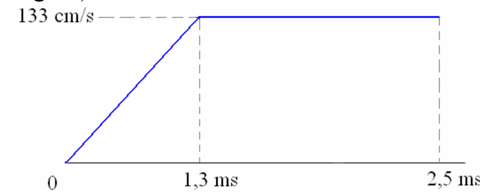
$v = 0{,}75(12{,}5)^2 - 0{,}40(12{,}5)^3 = 39{,}1$ m/s

Ejemplo 34. Salto volador de la pulga. Una película tomada a alta velocidad por M. Rothschild, Y. Schlein. K. Parker, C. Neville y S. Sternberg (3500 cuadros por segundo, "The Flying Leap of the Flea", en el ScientificAmerican de noviembre de 1973) de una pulga saltarina de 210 μg produjo los

datos que se usaron para dibujar la gráfica de la figura. La pulga tenía una longitud aproximada de 2 mm y saltó con un ángulo de despegue casi vertical. Use la gráfica para contestar estas preguntas.
a) ¿La aceleración de la pulga es cero en algún momento? Si lo es, ¿cuándo? Justifique su respuesta.
b) Calcule la altura máxima que la pulga alcanzó en los primeros 2,5 ms.
c) Determine la aceleración de la pulga a los: 0,5 ms, 1,0 ms y 1,5 ms.
d) Calcule la altura de la pulga a los: 0,5 ms, 1,0 ms y 1,5 ms.



Solución.
a) Pendiente de $a = 0$ para $t \geq 1{,}3$ ms
b) La altura máxima corresponde al recorrido hasta cuando la aceleración se hace cero y llega al tiempo t = 2,5 ms, y es el área bajo la curva v versus t. (Dibujado aproximándolo a Un triángulo y un rectángulo).

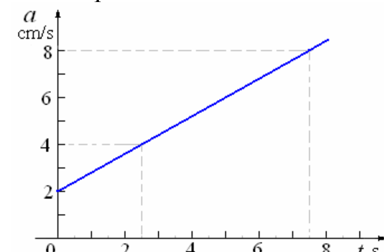


$$h_{max} = \text{área bajo } (v - t)$$
$$\approx A_{\text{Triángulo}} + A_{\text{Rectángulo}}$$
$$\approx \frac{1}{2}[(1{,}3)(133) + (2{,}5 - 1{,}3)(133)]10^{-3}$$
$$\approx 0{,}25 \text{ cm}$$

c) a = pendiente del gráfico v– t.
$$a\,(0{,}5\text{ ms}) \approx a\,(1{,}0\text{ ms})$$
$$\approx \frac{133}{1{,}3\times 10^{-3}} = 1{,}0\times 10^{5}\text{ cm/s}^2$$
$a\,(1{,}5\text{ ms}) = 0$ porque la pendiente es cero.

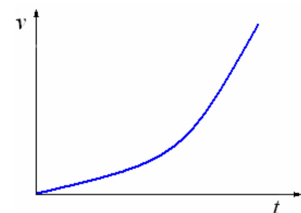
d) h = área bajo el gráfico v– t.
$$h(0{,}5) \approx A_{\text{Triángulo}} = \frac{1}{2}(0{,}5\times 10^{-3})(33)$$
$$= 8{,}3\times 10^{-3}\text{ cm}$$
$$h(1{,}0) \approx A_{\text{Triángulo}} = \frac{1}{2}(1{,}0\times 10^{-3})(100)$$
$$= 5{,}0\times 10^{-2}\text{ cm}$$
$$h\,(1{,}5) \approx A_{\text{Triángulo}} + A_{\text{Rectángulo}}$$
$$= \frac{1}{2}(1{,}3\times 10^{-3})(133) + (0{,}2\times 10^{-3})(133)$$
$$= 0{,}11\text{ cm}$$

Ejemplo 35. La gráfica de la figura describe, en función del tiempo, la aceleración de una piedra que baja rodando por una ladera, habiendo partido del reposo.
a) Determine el cambio de velocidad de la piedra entre t = 2,5 s y t = 7,5 s.
b) Dibuje una gráfica de la velocidad de la piedra en función del tiempo.



Solución.
a) $a = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt$

Como $a(t)$ es la ecuación de la recta:
$$\frac{a-2}{t-0} = \frac{8-4}{7{,}5-2{,}5} = 0{,}8 \Rightarrow a = 0{,}8t + 2$$
$$dv = (0{,}8t + 2)dt$$
Integrando: $\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t}(0{,}8t + 2)dt$
$$\Rightarrow v - v_0 = 0{,}4\left(t^2 - t_0^2\right) + 2(t - t_0)$$
Con $t_0 = 2{,}5s$, $t = 7{,}5s$, y $\Delta v = v - v_0$:
$$\Delta v = 0{,}4\left(7{,}5^2 - 2{,}5^2\right) + 2(7{,}5 - 2{,}5)$$
$$= 30\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$
Otra manera de encontrar el cambio de velocidad es encontrando el área bajo la curva a versus t, entre las líneas en $t = 2{,}5$s y $t = 7{,}5$s. El área es:
$$\tfrac{1}{2}(4+8)(7{,}5-2{,}5) = 30\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$
Como la aceleración es positiva, el cambio de velocidad es positivo.
b)



Ejemplo 36. La velocidad de un punto que se mueve en trayectoria recta queda expresada, en el SI por la ecuación: v = 40 - 8t. Para t = 2 s, el punto dista del origen 80 m. Determinar:

a) La expresión general de la distancia al origen.
b) El espacio inicial.
c) La aceleración.
d) ¿En qué instante tiene el móvil velocidad nula?
e) ¿Cuánto dista del origen en tal instante?
f) Distancia al origen y espacio recorrido sobre la trayectoria a partir de $t = 0$, cuando $t = 7$ s, $t = 10$ s y $t = 15$ s.

Solución.

a) $s = \int v dt = \int (40 - 8t) dt = 40t - 4t^2 + C$

$\Rightarrow s = s_0 + 40t - 4t^2$

b) $80 = s_0 + 80 - 16 \Rightarrow s_0 = 16$

c) $a = \frac{dv}{dt} = -8 \frac{m}{s^2}$

d) $0 = 40 - 8t \Rightarrow t = 5$ s

e) $s_5 = 16 + 40x5 - 4x5^2 = 116$ m

f) $s_7 = 16 + 40x7 - 4x7^2 = 100$ m

$s_{10} = 16 + 40x10 - 4x10^2 = 16$ m

$s_{15} = 16 + 40x15 - 4x15^2 = -284$ m

Cálculo de caminos sobre la trayectoria a partir de $t = 0$:

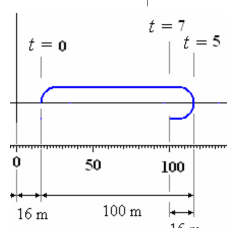
El móvil cambia el sentido de su velocidad para $t = 5$s

El recorrido en los 5 primeros segundos es:

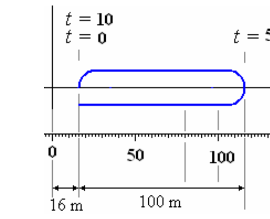
$C_5 = s - s_0 = 116 - 16 = 100$ m

A ellos hay que sumar el recorrido en los segundos restantes que se obtienen de la integral de la ecuación general de la velocidad, en valor absoluto, entre los limites $t = 5$ s y $t =$ instante final.

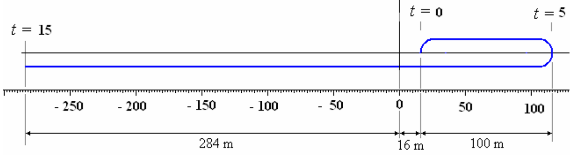
$$C_7 = 100 + \left| \int_5^7 (40 - 8t) dt \right| = 116 m$$



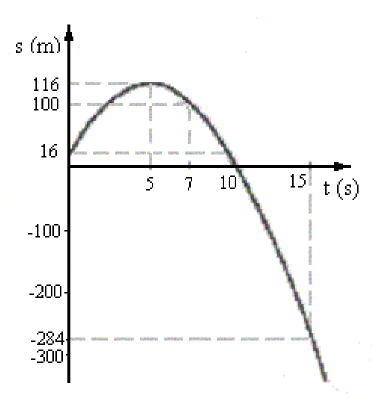
$$C_{10} = 100 + \left| \int_5^{10} (40 - 8t) dt \right| = 200 m$$



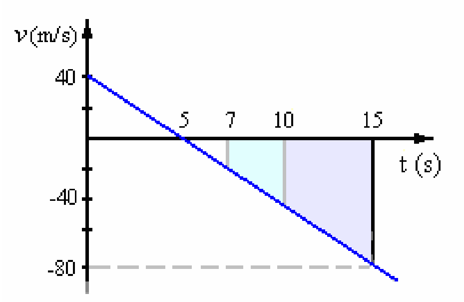
$$C_{15} = 100 + \left| \int_5^{15} (40 - 8t) dt \right| = 500 m$$



Representación gráfica de la distancia al origen en función del tiempo



Representación gráfica de la velocidad origen en función del tiempo



En la gráfica de la velocidad frente al tiempo, el área limitada por el eje de abscisas y la gráfica entre dos instantes coincide numéricamente con el camino recorrido por el móvil entre esos dos instantes.

Ejemplo 37. El vector velocidad del movimiento de una partícula viene dado por

$\vec{v} = (3t - 2)\hat{i} + (6t^2 - 5)\hat{j}$ m/s. Si la posición del móvil en el instante $t = 1$ s es $\vec{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$ m. Calcular

a) El vector posición del móvil en cualquier instante.

b) El vector aceleración.

c) Las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante $t = 2$ s. Dibujar el vector velocidad, el vector aceleración y las componentes tangencial y normal en dicho instante.

Solución.

a) Para el movimiento horizontal

$$v_x = 3t - 2 \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = 3\frac{m}{s^2}$$

Como $v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x dt$, integrando

$$\int_3^t dx = \int_1^t (3t-2)dt$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{3}{2}t^2 - 2t + \frac{7}{2}\right)\text{m}$$

Para el movimiento vertical

$$v_y = 6t^2 - 5 \quad \Rightarrow \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 12t\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Como $v_y = \dfrac{dy}{dt}$ $\Rightarrow dy = v_y dt$, integrando

$$\int_{-2}^t dy = \int_1^t (6t^2 - 5)dt \quad \Rightarrow$$
$$y = (2t^3 - 5t + 1)\text{m}$$

$$\vec{r} = \left(\frac{3}{2}t^2 - 2t + \frac{7}{2}\right)\hat{i} - (2t^3 - 5t + 1)\hat{j}$$

b) $\vec{a} = 3\hat{i} + 12t\hat{j}$

c) Para $t = 2$ s

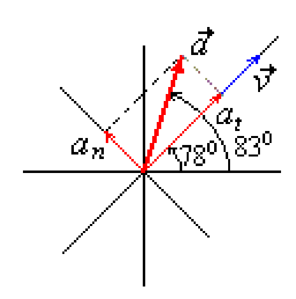
$v_x = 4$ m/s, $v_y = 19$ m/s

$a_x = 3$ m/s^2, $a_y = 24$ m/s^2

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 24{,}2\text{m/s}^2$$

$$\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{19}{4} = 4{,}75 \Rightarrow \varphi = 78^o$$

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{24}{3} = 3 \Rightarrow \theta = 83^o$$

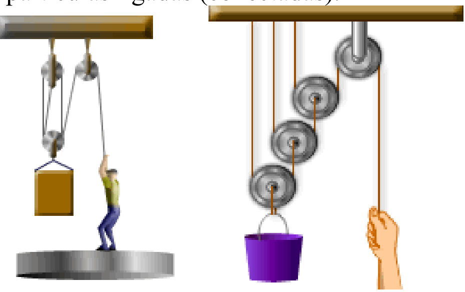


$$a_t = a\cos(\theta - \varphi) = 24{,}1\text{m/s}^2$$

$$a_n = a\text{sen}(\theta - \varphi) = 2\text{m/s}^2$$

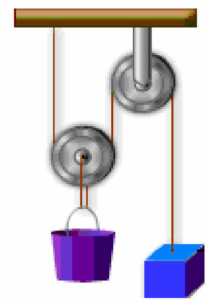
CINEMÁTICA DE PARTÍCULAS LIGADAS. MOVIMIENTOS DEPENDIENTES.

Observemos los sistemas físicos de la figura.
Podríamos decir que estos sistemas se componen de varias partículas ligadas (conectadas).

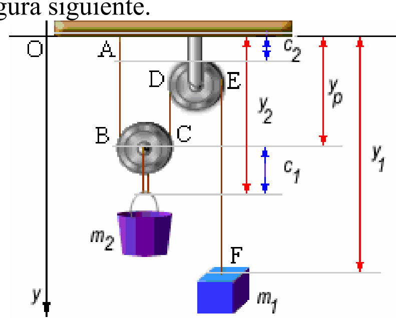


Las partículas podrían ser las poleas y los cuerpos a desplazar (bloques, baldes). La ligadura la tienen a través de las cuerdas. Es decir, cuando el hombre desplaza el extremo de la cuerda con una aceleración *a*, la aceleración de las poleas y los cuerpos a desplazar (bloques, baldes) tendrán una dependencia de *a*. Lo mismo se cumplirá para las otras variables cinemáticas (desplazamiento y velocidad).

Ejemplo 38. Análisis del montaje de la figura siguiente.



Para analizar las relaciones que hay entre las variables cinemáticas del bloque m_1, del balde m_2 y de la polea móvil, debemos primero saber cuáles son sus posiciones. Para ello elegimos un sistema de coordenadas. En nuestro caso elegimos el eje *y* apuntando hacia abajo y con el origen en el techo. Para el sistema de coordenadas escogido las posiciones del bloque, del balde y de la polea son respectivamente: y_1, y_2, y_p. Estas se representan en la figura siguiente.



La longitud de la cuerda debe permanecer constante en todo instante. Por tanto debe ser siempre válida la siguiente relación:
Longitud de la cuerda = constante
AB + arco BC + CD +arco DE +EF = constante
De la figura podemos concluir que las siguientes relaciones son válidas:

$$\mathrm{AB} = y_p$$

$$\mathrm{CD} = y_p - c_2$$

$$\mathrm{EF} = y_1 - c_2$$

Por tanto,

$$y_p + \mathrm{arcoBC} + (y_p - c_2) + \mathrm{arcoDE} + y_1 = \text{constante}$$

Como los arcos BC y DE permanecen constantes podremos escribir la relación anterior así:

$$2y_p + y_1 = k \qquad (1)$$

Siendo *k* una constante.
Esta ecuación relaciona las variables cinemáticas de la polea móvil y del bloque.
Si el bloque se desplaza una cantidad Δy_1 y la polea en una cantidad Δy_p.
La nueva posición de la polea:

$$y_p + \Delta y_p,$$

La nueva posición del bloque: $y_1 + \Delta y_1$.
Sin embargo, la relación anterior debe seguir cumpliéndose:

$$2(y_p + \Delta y_p) + (y_1 + \Delta y_1) = k \quad (2)$$

Restando (1) de (2), obtenemos:

$$2\Delta y_p + \Delta y_1 = 0$$

$$\Delta y_p = -\frac{\Delta y_1}{2}$$

Por ejemplo, si el bloque baja 1,0 m, la polea solo sube 0,50 m. La polea solo se desplaza la mitad de lo que se desplaza el bloque.

Análogamente podríamos hacer un análisis para las aceleraciones, y concluiríamos que:

$$a_p = -\frac{1}{2}a_1$$

Es decir, si el bloque por ejemplo, baja con una aceleración igual a 2,0 m/s^2 , la polea subirá con una aceleración igual a 1,0 m/s^2 .

De esta figura también se deduce la siguiente relación entre la posición del balde y la posición de la polea móvil:

$$y_2 = y_p + c_1 \qquad (3)$$

Si el balde se desplaza una cantidad Δy_2, y la polea se desplaza una cantidad Δy_p.
El balde pasa a ocupar la posición: $y_2 + \Delta y_2$,
La polea pasa a ocupar la posición $y_p + \Delta y_p$.
Sin embargo, la relación anterior se debe seguir cumpliéndose.

$$(y_2 + \Delta y_2) = (y_p + \Delta y_p) + c_1 \quad (4)$$

Restando (3) y (4) obtenemos,

$$\Delta y_2 = \Delta y_p$$

Los desplazamientos de la polea y el balde son iguales.
Si dividimos la ecuación anterior por el intervalo de tiempo Δt obtenemos como se relacionan las velocidades: $v_2 = v_p$.
Las velocidades de la polea y del balde son iguales.
Lo mismo podremos concluir para las aceleraciones:

$$a_2 = a_p$$

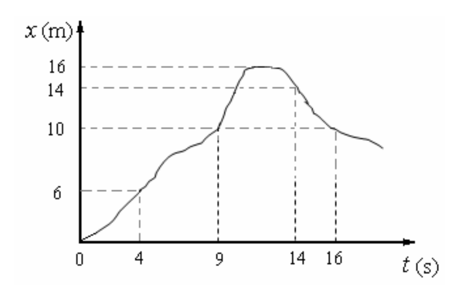
En definitiva si el bloque baja con una aceleración igual a 4 m/s^2, el balde y la polea móvil subirán con una aceleración igual a 2 m/s^2.

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Un acelerador atómico emite partículas que se desplazan con una rapidez de 2,8x10^8 m/s. ¿cuánto demoran estas partículas en recorrer una distancia de 5,6mm?
Respuesta
2x10^{-11} s.

2. Se desea calcular cuál es la profundidad de un lago, para tal efecto se usa un instrumento conocido como sonar que mide el tiempo que tarda un pulso sonoro en ir y volver desde la superficie del agua. Si se sabe que la rapidez del sonido en el agua es de 1450m/s y el instrumento marcó 0,042s cuando se hizo la medición, calcule la profundidad del lago.
Respuesta. 30,45m

3. Una cucaracha se desplaza en línea recta y su posición con respecto al tiempo se expresa de acuerdo al siguiente gráfico. De acuerdo a la información dada se pide calcular.
a) distancia recorrida entre 4s y 9 s
b) distancia recorrida entre 9 s y 14s
c) distancia recorrida entre 0 y 16s.
d) velocidad media entre 0s y 16s.
e) velocidad media entre 9s y 16s.



Respuesta
a) 4m b) 8m c) 22m d) 5/8 m/s e) 0

4. Un hombre camina con una velocidad $\vec{v}$ constante pasa bajo un farol que cuelga a una altura *H* sobre el suelo. Encontrar la velocidad con la que el borde de la sombra de la cabeza del hombre se mueve sobre la tierra. El alto del hombre es *h*.
Respuesta

$$\frac{H\vec{v}}{H-h}$$

5. Un tren arranca en una estación y acelera uniformemente a razón de 0,6 m/s^2 hasta alcanzar una velocidad de 24 m/s. Determinar el tiempo empleado y la distancia recorrida en ese período si la velocidad media fue: a) 16 m/s, b) 22m/s.
Respuesta
a) 60s, 960m, b) 240s, 5280m

6. Un ciclista recorre 100 km en 2 horas. El viaje de vuelta dos días más tarde lo realiza en el tiempo usual de 6 horas.
a) ¿Cuál es su rapidez media a la ida?
b) ¿Cuál es su rapidez media al regreso?
c) ¿Su rapidez media en e¡ viaje completo?
d) ¿Su velocidad media en e} viaje entero?
Respuesta. a) 50 km/h , b) 16,7 km/h
c) 25 km/h d) 0

7. Un automóvil que viaja con una velocidad de 50 km/h hacia el oeste repentinamente empieza a perder velocidad a un ritmo constante y 3 segundos más tarde su velocidad es de 25 km/h hacia el oeste.
a) ¿Cuánto tiempo tardará en detenerse el auto, contando a partir del momento en que empezó a desacelerar?
b) ¿Cuál es la distancia total que recorrerá antes de detenerse?
c) ¿Cuál sería el tiempo necesario para detenerse y la distancia recorrida el) la frenada con la misma aceleración, pero con una velocidad inicial de 100 km/h?
Respuesta. a) t = 6s ; b) 41,7m ; c) 125; 125m

8. La aceleración de una partícula está dada por:
$a = 4t - 4t^3$, $t \geq 0$.
a) Hallar la velocidad de la partícula en función del tiempo.
b) Hallar su posición en función del tiempo.
Respuesta
a) $v = 2t^2 - t^4$; b) $x = 2 + 2t^3/3 - t^5/5$

9. El movimiento de una partícula se define mediante la relación $x = t^3/3 - 3t^2 + 8t + 2$, donde *x* se expresa en metros y *t* en segundos. Determinar
a) el momento en que la velocidad es nula;
b) la posición y la distancia total recorrida cuando la aceleración es nula.
Respuesta
a) 2s, 4s; b) 8m, 7,33m

10. El movimiento de una partícula está dado por la ecuación horaria $x = t^3 + 4t^2 + 5x$ sobre el eje *x*, *x* en metros *t* en segundos.
a) Calcular la velocidad y la aceleración de la partícula en el instante *t*.
b) Encontrar la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula para $t_0 = 2$s y $t_1 = 3$s.
c) ¿Cuáles son la velocidad media y la aceleración media de la partícula entre t_0 y t_1?
Respuesta.
a) $v = (3t^2 + 8t)$m/s , $a = (6t + 8)$ m/s^2
b) $x_0 = 29$m, $v_0 = 27$ m/s, $a_0 = 20$ m/s^2
$x_1 = 68$ m $v_1 = 51$ m/s, $a_1 = 26$ m/s^2
c) $v_m = 39$ m/s , $a_m = 23$ m/s^2

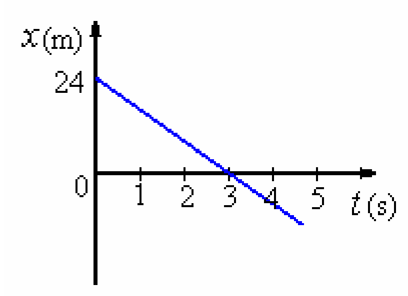
11. La posición de una partícula que se mueve en el eje *x* está dada por 8 *t* + 5, *x* es la distancia a origen en metros y *t* es el tiempo en segundos.
a) Para *t* = 2, encontrar la posición, velocidad y aceleración
b) Grafique *x* versus *t*
c) Encuentre la ley horaria, la ley del movimiento y la trayectoria.
d) Analizar el movimiento.
Respuesta. a) $x = -3$, $v = 0$, $a = 4$
b) $s = 2t^2 - 8t + 5$, $\vec{r} = (2t^2 - 8t + 5)\hat{i}$
Trayectoria rectilínea en el eje *x*.

12. Un automóvil se encuentra detenido frente a un semáforo, le dan luz verde y arranca de modo que a los 4s su rapidez es de 72 km/hora. Si se movió en trayectoria rectilínea, con aceleración constante,
I.- Determine:
a) La rapidez inicial en metros por segundo.
b) El módulo de la aceleración en ese tramo.
c) La rapidez que lleva a los 3s.
d) La distancia que recorre en los tres primeros segundos
e) La distancia que recorre entre *t* = 2s y *t* = 4s.
II.- Haga un gráfico representativo de posición versus tiempo y de la rapidez versus tiempo.

Respuesta. a) 20m/s b) 5 m/s^2 c) 15m/s
d) 22.45m e) 30m

13. Una partícula **A**, se mueve en el eje X, de acuerdo a la siguiente gráfica.
Determinar a partir del gráfico de la partícula:

a) Velocidad media entre t = 0 y t = 4 s
b) Velocidad instantánea en t = 2 s
c) Aceleración media entre t = 0 y t = 4 s
d) Intervalos de tiempo en que se acerca al origen
e) Intervalos de tiempo en que se aleja del origen
f) Ecuación Itinerario de la partícula A
g) ¿Qué tipo de movimiento tiene esta partícula?



Respuesta. a) (-8;0)m/s b) (-8;0)m/s c) 0
d) (0-3)s e)(3-....) f) $x(t)=24-8t$
g) Movimiento rectilíneo uniforme.

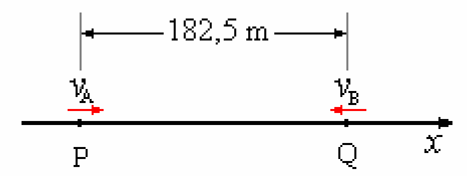
14. Un vehículo se mueve en el eje x de acuerdo con la siguiente ecuación de itinerario:
$x(t)=20-36t+6t^2$. Con x medido en metros y t en segundos.
a) Identifique a posición inicial, la velocidad inicial y la aceleración.
b) Determine la ecuación que entregue la velocidad para cualquier instante.
c) Determine el instante en que cambia de sentido
d) La velocidad de la partícula en t = 2 s y en t = 4 s
e) Posición de la partícula en t = 6 segundos
f) Gráfico x versus t. Describa la curva
g) Gráfico v_x versus t. Describa la curva
h) Gráfico a versus t. Describa la curva
Respuesta. a) (20,0)m (-36,0)m/s (12,0)m/s^2 b) $v(t)=-36+12t$ c)3s
d) (-12,0)m/s (12,0)m/s e) (20,0)m

15. Se lanza un cuerpo hacia arriba con una rapidez de 16m/s,
a) ¿Qué altura alcanza a subir?
b) ¿Qué tiempo demora en volver al punto de partida?
Respuesta. a) 3,2m b) 6,4s

16. Una partícula se mueve sobre una recta horizontal; parte hacia la derecha desde un punto A con una rapidez de 28 (m/s) y una retardación constante de módulo 12(m/s^2). En el punto B, es donde se anula su rapidez, invierte el sentido de movimiento para retornar hacia A con una aceleración constante de módulo 6(m/s^2). Calcular:
a) La distancia total cubierta hasta que la partícula retorne al punto A.
b) El tiempo total para el recorrido completo hasta volver a dicho punto A.
c) El intervalo de tiempo que transcurre entre los pasos de la partícula por el punto situado a 1/3 de AB, medido desde A.

17. Desde una altura de 45m se deja caer un objeto A. simultáneamente se lanza un objeto B verticalmente desde una altura de 5m. Calcular:
a) la velocidad inicial de B para que los objetos se crucen a una altura de 20m.
b) la distancia que separa a los objetos cuando B alcanza su altura máxima.

18. Sobre un mismo eje x se mueven dos partículas A y B. En t = 0 la partícula A parte desde P con aceleración constate de $15\hat{i}$ (m/s^2). Un segundo después, B pasa por Q con una velocidad de $-20\hat{i}$ (m/s). Encuentre las retardaciones constantes que deben aplicar A y B a partir de este último instante para que ambas partículas se detengan simultáneamente antes de chocar.

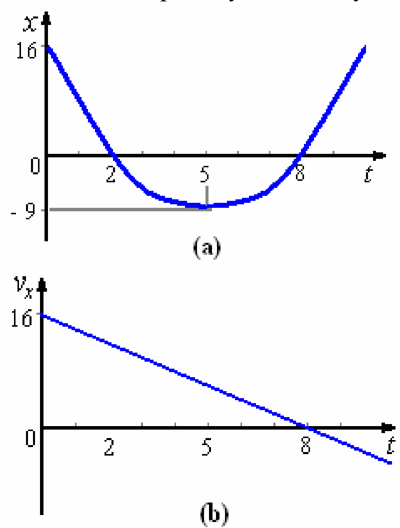


19. Una partícula se mueve a lo largo del eje x con aceleración constante. En t = 0 pasa por la posición $\vec{x}_0=-10\hat{i}$ m con una velocidad $\vec{v}_0=-20\hat{i}$ m/s y en t =3s su posición es $\vec{x}=-52\hat{i}$ m. Calcule:
a) La ecuación itineraria de la partícula
b) La distancia recorrida en el intervalo (3-6) s.
c) La velocidad media en el intervalo (4-7) s.
d) Intervalos de tiempo en que la partícula se aleja del origen del sistema.

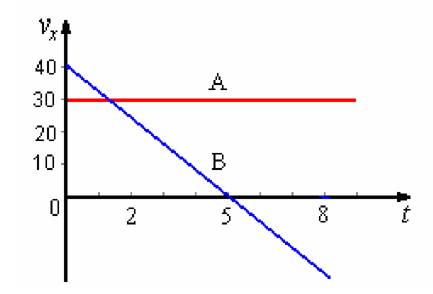


20. Sobre el eje x de un sistema de coordenadas se mueven dos partículas A y B. El gráfico (a) es una parábola cuadrática que muestra la variación de la componente x de la posición en función del tiempo de la partícula A. El gráfico (b) muestra la variación de la componente v_x de la velocidad en función del tiempo de la partícula B. Si en t = 0, ambas partículas tienen la misma posición, determinar:
a) Ecuación horaria de las partículas A y B.

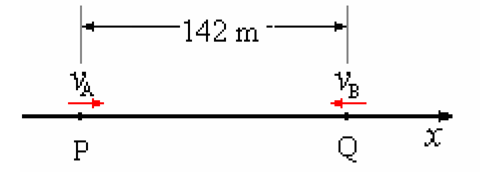
b) Posición de B cuando A cambia de sentido de movimiento.
c) Instante en que se encuentran.
d) Distancia recorrida por A y B entre 3 y 9 s.



21. En el gráfico de la figura están representadas la componente v_x del vector velocidad de dos partículas, A y B, que se mueven a lo largo del eje *x* Calcular:
a) La aceleración de B.
b) Camino recorrido por A y B cuando B alcanza la velocidad $\vec{v}_B = 30\hat{i}$ m/s.
c) Desplazamiento de B en el intervalo (0-10)s.
d) Ecuación horaria de A si en $t_0 = 0$ su posición es $\vec{x}_0 = 8\hat{i}$ m.

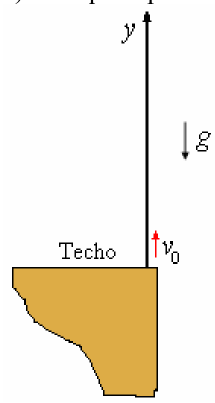


22. Dos partículas A y B se mueven sobre el mismo eje *x*. En *t* = 0, B pasa por Q con m/s $\vec{v}_B(0) = (-5{,}0)$ m/s y 2s después A pasa por P a $6\hat{i}$ m/s. Encuentre las retardaciones constantes que deben aplicar A y B a partir de este último instante para que ambas partículas se detengan simultáneamente justo antes de chocar. Determine la ecuación itinerario de A y B (diga cuál es su origen).



23. Un cuerpo que se ha dejado caer desde cierta altura, recorre 72 m en el último segundo de su movimiento.
Calcule la altura desde la cual cayó el cuerpo y el tiempo que empleó en llegar al suelo.

24. Un hombre parado en el techo de un edificio tira un cuerpo verticalmente hacia arriba con una rapidez de 14m/s. El cuerpo llega al suelo 4,7s más tarde.
a) Cuál es la máxima altura alcanzada por el cuerpo?
b) Qué altura tiene el edificio?
c) Con qué rapidez llegará el cuerpo al suelo?



25. Un malabarista mantiene cinco bolas continuamente en el aire, lanzando cada una de ellas hasta una altura de 3m.
a) ¿Cuál es el tiempo que debe transcurrir entre lanzamientos sucesivos?
b) ¿Cuáles son las alturas de las otras pelotas en el momento en que una de ellas vuelve a su mano?
Respuesta. a) 0,31s ;
b) 1,91; 2,87; 2,87 y 1,91 m.

26. Dos cuerpos son lanzados uno después de otro con las mismas velocidades v_0 desde una torre alta. El primer cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba, y el segundo verticalmente hacia abajo después del tiempo τ. Determinar las velocidades de los cuerpos una con respecto al otro y las distancias entre ellos en el instante $t > \tau$.
Respuesta. La velocidad del primer cuerpo relativa al segundo es: $v_1 - v_2 = 2v_0 - g\tau$.

La distancia es $S = 2v_0 t - v_0\tau - gt\tau + \frac{1}{2}g\tau^2$

CAPITULO 3. Movimiento en un plano y en el espacio

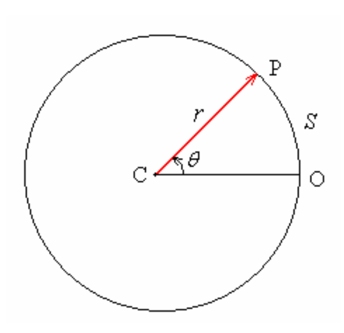
MOVIMIENTO CIRCULAR

Se define movimiento circular como aquél cuya trayectoria es una circunferencia. Una vez situado el origen O de ángulos describimos el movimiento circular mediante las siguientes magnitudes.

Posición angular, θ

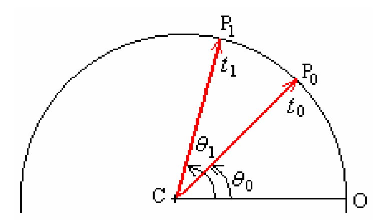
En el instante *t* el móvil se encuentra en el punto P. Su posición angular viene dada por el ángulo θ, que hace el punto P, el centro de la circunferencia C y el origen de ángulos O.

El ángulo θ, es el cociente entre la longitud del arco S y el radio de la circunferencia *r*, $\theta = S / r$. La posición angular es el cociente entre dos longitudes y por tanto, no tiene dimensiones.



Velocidad angular, ω

En el instante t_1 el móvil se encontrará en la posición P_1 dada por el ángulo θ_1. El móvil se habrá desplazado $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_0$ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_1 - t_0$ comprendido entre t_0 y t_1.



Se denomina velocidad angular media al cociente entre le desplazamiento y el tiempo.

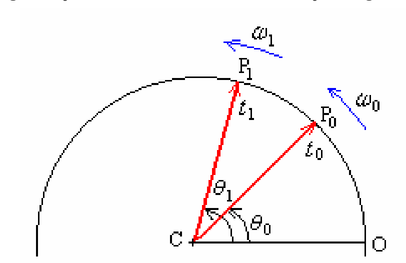
$\omega_m = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$, con las unidades en el SI de rad/s.

Como ya se explicó en el movimiento rectilíneo, la velocidad angular en un instante se obtiene calculando la velocidad angular media en un intervalo de tiempo que tiende a cero.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Aceleración angular, α

Si en el instante *t* la velocidad angular del móvil es ω y en el instante t_1 la velocidad angular del móvil es ω_1. La velocidad angular del móvil ha cambiado $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_1 - t_0$ comprendido entre t_0 y t_1.



Se denomina aceleración angular media al cociente entre el cambio de velocidad angular y el intervalo de tiempo que tarda en efectuar dicho cambio.

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

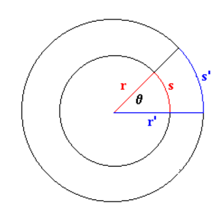
La aceleración angular en un instante, se obtiene calculando la aceleración angular media en un intervalo de tiempo que tiende a cero.

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

RELACIÓN ENTRE LAS MAGNITUDES ANGULARES Y LINEALES

De la definición de radián (unidad natural de medida de ángulos) obtenemos la relación entre el arco y el radio. Como vemos en la figura, el ángulo se obtiene dividiendo la longitud del arco entre su radio

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{s'}{r'}$$



Derivando $s = r\theta$ respecto del tiempo obtenemos la relación entre la velocidad lineal y la velocidad angular

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = r\omega$$

La dirección de la velocidad es tangente a la trayectoria circular, es decir, perpendicular a la dirección radial

Aceleración tangencial

Derivando esta última relación con respecto del tiempo obtenemos la relación entre la aceleración tangencial a_t y la aceleración angular.

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_t = r\alpha$$

Existe aceleración tangencial, siempre que el módulo de la velocidad cambie con el tiempo, es decir, en un movimiento circular no uniforme

Hallar el desplazamiento angular a partir de la velocidad angular.
Si conocemos un registro de la velocidad angular del móvil podemos calcular su desplazamiento $\theta-\theta_0$ entre los instantes t_0 y t, mediante la integral definida.

$$\theta-\theta_0 = \int_{t_0}^{t}\omega dt$$

Hallar el cambio de velocidad angular a partir de la aceleración angular.
Del mismo modo que hemos calculado el desplazamiento angular del móvil entre los instantes t_0 y t, a partir de un registro de la velocidad angular ω en función del tiempo t.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\theta-\theta_0 = \int_{t_0}^{t}\omega\, dt \quad \omega-\omega_0 = \int_{t_0}^{t}\alpha\, dt$$

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME
Un movimiento circular uniforme es aquél cuya velocidad angular ω es constante, por tanto, la aceleración angular es cero.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt$$

La posición angular θ del móvil en el instante t podemos calcularla integrando

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t}\omega dt$$

$$\theta-\theta_0 = \omega(t-t_0)$$

O gráficamente, en la representación de ω en función de *t*.
Habitualmente, el instante inicial t_0 se toma como cero. Las ecuaciones del movimiento circular uniforme son análogas a las del movimiento rectilíneo uniforme

$$\alpha = 0 \quad \omega = \text{constante} \quad \theta = \theta_0 + \omega t$$

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO
Un movimiento circular uniformemente acelerado es aquél cuya aceleración α es constante.
Dada la aceleración angular podemos obtener el cambio de velocidad angular $\omega-\omega_0$ entre los instantes t_0 y t, mediante integración de la velocidad angular ω en función del tiempo

$$\omega = \omega_0 + \alpha\,(t-t_0).$$

Siendo $\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt$, integrando obtenemos el desplazamiento $\theta-\theta_0$ del móvil entre los instantes t_0 y t:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t}\left[\omega_0 + \alpha(t-t_0)\right]dt \Rightarrow$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2$$

Habitualmente, el instante inicial t_0 se toma como cero. Las fórmulas del movimiento circular uniformemente acelerado son análogas a las del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

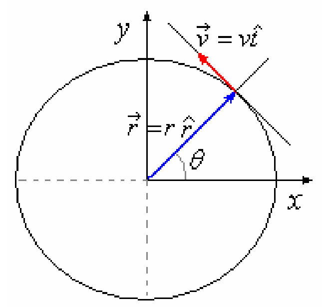
$$\alpha = \text{constante}, \quad \omega = \omega_0 + \alpha\, t,$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0\, t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2$$

Despejando el tiempo t en la segunda ecuación y sustituyéndola en la tercera, relacionamos la velocidad angular ω con el desplazamiento $\theta-\theta_0$.

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta-\theta_0)$$

COMPONENTES NORMAL Y TANGENCIAL DE LA ACELERACIÓN.
Cuando el sistema de referencia se sitúa sobre la partícula tal como se indica en la figura, pero no de cualquier modo. Uno de los ejes siempre está perpendicular a su trayectoria, y el otro siempre es tangente a la misma. Así pues,



El primero siempre pasará por el centro de la circunferencia. Al primer eje se le denomina eje normal, con vector unitario $(\hat{r} = \hat{n})$ y al segundo eje tangencial, con vector unitario $(\hat{t})$. Debemos estudiar ahora que componentes tienen la velocidad y la aceleración en este sistema de referencia.

Velocidad.
Con anterioridad se ha deducido que el vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria descrita. Por tanto es fácil afirmar que en este movimiento la velocidad será de la forma $\vec{v} = v\hat{t}$

Aceleración.

No es tan obvio que la aceleración tenga una sola componente, de manera que adoptará la expresión general $\vec{a} = a_t\hat{t} + a_n\hat{n}$

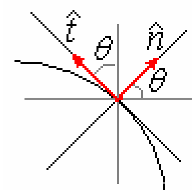
Sabemos por la definición de aceleración que

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, luego.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv\hat{t}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + v\frac{d\hat{t}}{dt}$$

Estudiemos el último término de esta expresión $\dfrac{d\hat{t}}{dt}$

Si se define el ángulo θ, como el ángulo formado por el eje normal con el eje de abscisas (eje *x*), tal como se muestra en la figura.



No es difícil darse cuenta que el vector $\hat{t}$ desde el sistema de referencia situado en el centro de la circunferencia tendrá la forma

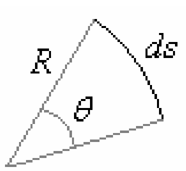
$\hat{t} = -\text{sen}\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$, mientras que $\hat{n}$ al ser perpendicular a este adoptará la expresión

$\hat{n} = \cos\theta\,\hat{i} + \text{sen}\theta\,\hat{j}$

Derivando $\hat{t} \Rightarrow$

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = -\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{i} - \text{sen}\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{j}$$

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\left(-\cos\theta\,\hat{i} - \text{sen}\theta\hat{j}\right)$$



Ahora bien, si tomamos un desplazamiento diminuto sobre la circunferencia, al que denominamos ds, teniendo en cuenta que arco = ángulo x radio, del esquema adjunto se deduce que $ds = Rd\theta$, y además el módulo de la velocidad instantánea lo podemos expresar como $v = \dfrac{ds}{dt}$, utilizando estos dos últimos llegamos a $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega = \dfrac{v}{R}$,

reemplazando en $\dfrac{d\hat{t}}{dt}$:

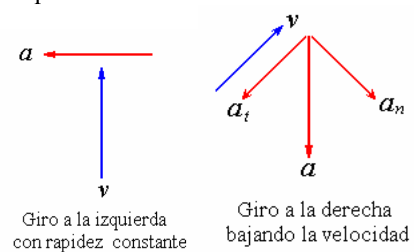
$\dfrac{d\hat{t}}{dt} = -\dfrac{v}{R}\left(\cos\theta\,\hat{i} + \text{sen}\theta\,\hat{j}\right)$, si observamos detenidamente esta ecuación, comprobaremos que el paréntesis es efectivamente $\hat{n}$, por lo que $\dfrac{d\hat{t}}{dt}$ quedará como $\dfrac{d\hat{t}}{dt} = -\omega\hat{n} = -\dfrac{v}{R}\hat{n}$.

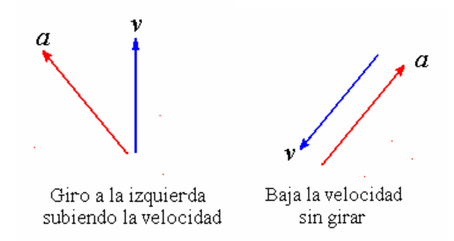
Finalmente: $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\hat{t} - \dfrac{v^2}{R}\hat{n}$

Así, en esta expresión, se denomina aceleración tangencial (a_t) al término $a_t = \dfrac{dv}{dt}$ y aceleración normal (a_n) a la ecuación $a_n = -\dfrac{v^2}{R}$

De esta expresión para la aceleración pueden concluirse cosas sustancialmente importantes:
Existen dos componentes: Una tangente a la trayectoria y una perpendicular y orientada hacia el centro de la circunferencia.
La aceleración tangencial sólo se dará en aquellos movimientos en los que el módulo de la velocidad varíe con el tiempo. Por tanto, en el caso particular del MCU, su aceleración tangencial será nula.
La aceleración normal siempre existirá, salvo que el radio de curvatura fuera muy grande, con lo cual tendería a cero, que es el caso extremo de los movimientos rectilíneos.
Concluyendo pues, en un MCU, la aceleración tendrá la expresión $\vec{a} = -\dfrac{v^2}{R}\hat{n}$ es decir sólo presentará aceleración normal.

Un objeto puede experimentar la aceleración normal o centrípeta y la aceleración tangencial. En las figuras siguientes se muestran algunas combinaciones posibles para v y a para un auto en movimiento. Para entender la aceleración, descompóngala en las componentes paralela y perpendicular a v. Para decir si el auto está dando vuelta a la derecha o a la izquierda, imagínese que usted es el conductor que se sienta con el vector de la velocidad dirigido hacia adelante de usted. Un componente de la aceleración hacia adelante significa que la velocidad está aumentando.





Ejemplo 1. Un avión a chorro militar de combate volando a 180 m/s sale de una picada vertical dando la vuelta hacia arriba a lo largo de una trayectoria circular de 860 m de radio ¿cuál es la aceleración del avión? Exprese la aceleración como múltiplo de *g*.

Solución.

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{180^2}{860} = 37,7\frac{m}{s^2}$$

$$a = 37,7\frac{g}{9,8} = 3,8g$$

Ejemplo 2. Una rueda de 75 cm de diámetro gira alrededor de un eje fijo con una velocidad angular de 1 rev/s. La aceleración es de 1,5 rev/s^2.

a) Calcúlese la velocidad angular al cabo de 6 segundos.

b) ¿Cuánto habrá girado la rueda en ese tiempo?

c) ¿Cuál es la velocidad tangencial en un punto de la periferia de la rueda en $t = 6$ s?

d) ¿Cuál es la aceleración resultante de un punto de la de la periferia para $t = 6$ s?

Solución.

$R =$ 37,5 cm , $\omega_0 = 2\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\alpha = 3\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$

a) $\omega_{(t)} = \omega_0 + \alpha\, t \Rightarrow$

$$\omega_{(6)} = 2\pi + 3\pi(6) = 20\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) $\theta_{(t)} = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2 \Rightarrow$

$$\theta_{(6)} = 2\pi(6) + \frac{1}{2}(3\pi)(6^2) = 66\pi \text{ rad}$$

Habrá girado $\frac{66\pi}{2\pi}$ = 33 vueltas.

c) $v_{(t)} = R\omega_{(t)} \Rightarrow$

$$v_{(6)} = 37,5(20\pi) = 750\pi\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

d) $a_n = \omega_{(6)}^2 R \Rightarrow$

$a_n = (20\pi)^2(37,5)$ = 147894 cm/s^2.

$a_t = \alpha R \Rightarrow a_n = (3\pi)(37,5)$ = 353,25 cm/s^2.

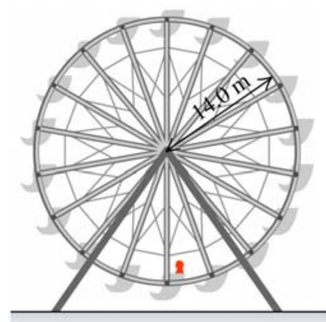
$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ = 147894,42 cm/s^2.

Ejemplo 3. Una rueda de la fortuna de 14,0 m de radio gira sobre un eje horizontal en el centro. La rapidez lineal de un pasajero en el borde es constante e igual a 7,00 m/s. ¿Qué magnitud y dirección tiene la aceleración del pasajero al pasar

a) por el punto más bajo de su movimiento circular?

b) por el punto más alto?

c) ¿Cuánto tarda una revolución de la rueda?



Solución.

a) $a = \frac{v^2}{R} = \frac{7,00^2}{14,0} = 3,50\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. La aceleración el punto más bajo del círculo es hacia el centro, hacia arriba.

b) $a = 3,50 \text{ m/s}^2$, dirigida hacia abajo., hacia el centro.

c) Como $v = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi(14,0)}{7,00} = 12,6 \text{ s}$$

Ejemplo 4. La rueda de la figura del problema anterior, que gira en sentido antihorario, se acaba de poner en movimiento. En un instante dado, un pasajero en el borde de la rueda que está pasando por el punto más bajo de su movimiento circular tiene una rapidez de 3,00 m/s, la cual está aumentando a razón de 0,500 m/s^2.

Calcule la magnitud y la dirección de la aceleración del pasajero en este instante.

Solución.

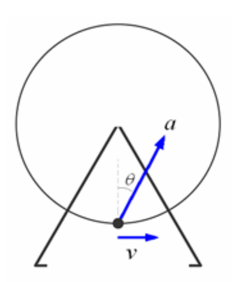
$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{3,00^2}{14,0} = 0,643\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, y $a_t = 0,5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Luego:

$$\vec{a} = a_c\hat{n} + a_t\hat{t} = -0,643\hat{j} + 0,5\hat{i}$$

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{0,643^2 + 0,5^2} = 0,814\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{0,5}{0,643} = 37,9^\circ$$



Ejemplo 5. Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio *R* con aceleración angular constante partiendo del reposo. Si la partícula realiza *n* vueltas completas a la circunferencia en el primer segundo, determine la aceleración angular de la partícula. Determine además el número de vueltas que realiza la partícula durante el siguiente segundo del movimiento.

Solución.

Aquí $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$

Entonces $2\pi n = \frac{1}{2\alpha} \Rightarrow \alpha = 4\pi n$

Como $\theta = \frac{1}{2}(4\pi n)t^2 = 2\pi n t^2$,

Número de vueltas para $t = 1$

$$n(1)^2 = \frac{\theta_{(1)}}{2\pi}$$

Número de vueltas para $t = 2$

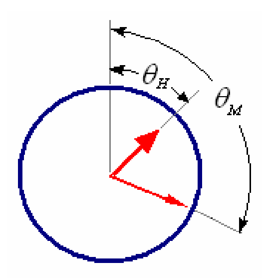
$$n(2)^2 = \frac{\theta_{(2)}}{2\pi}$$

Durante el siguiente segundo (dos) realiza

$$\frac{\theta_{(2)} - \theta_{(1)}}{2\pi} = n\left(2^2 - 1^2\right) = 3n \text{ vueltas.}$$

Ejemplo 6. En un reloj análogo el horario y el minutero coinciden a las 12:00:00 horas.
¿A qué hora minutero y horario formarán un ángulo de 90º?

Solución.



Como los movimientos del horario y minutero son circulares uniformes, encontramos para la posición angular del horario:

$\theta_H = \theta_{0H} + \omega_H t$. (1)

Análogamente para el minutero se tiene:

$\theta_M = \theta_{0M} + \omega_M t$. (2)



Como $\omega_H = \frac{2\pi}{T_H}, \omega_M = \frac{2\pi}{T_M}$ donde $T_H = 12$ h y $T_M = 1$ h y bajo la condición que estos formen un ángulo de 90º, es decir, $\theta_M - \theta_H = \frac{\pi}{2}$

De (2) - (1), con $\theta_{0H} = \theta_{0M} = 0$,

$$\theta_M - \theta_H = (\omega_M - \omega_H)t$$

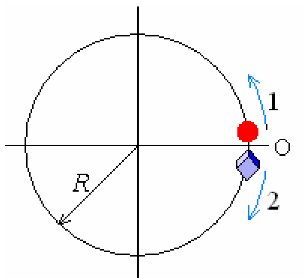
Se encuentra para *t*:

$$t = \frac{\pi}{2(\omega_M - \omega_H)} = \frac{3}{11}\text{ h},$$

Es decir, en *t* = 16,36 min.

Por lo tanto forman 90º a las 12:16:22 h.

Ejemplo 7. Dos partículas describen movimientos circulares de radio *R* = 1m, como lo muestra la figura. El primero (1) parte de O con rapidez angular $\omega = 10$ rad/s constante en sentido antihorario y el segundo (2) parte del reposo del mismo punto en sentido horario con aceleración tangencial constante de 2 m/s^2. Determine cuando y donde se cruzan ambas partículas.



Solución.

Como el cuerpo (1) se mueve con M.C.U., la posición angular de este será:

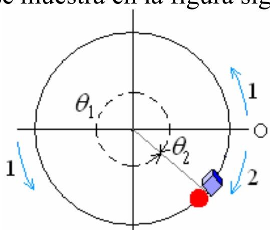
$\theta_1 = 0 + \omega_1 t = 10t$. (1)

El cuerpo (2) posee una aceleración tangencial constante y por lo tanto, se trata de un M.C.U.A.

Debido que $a_t = \alpha R = 2$ m/s^2, $\alpha = 2$rad/s^2. Por otro lado, como parte del reposo, $\omega_0 = 0$.

$$\theta_2 = -\frac{1}{2}2t^2 = -t^2$$

El recorrido se muestra en la figura siguiente:



El encuentro se produce cuando:

$$|\theta_1| + |\theta_2| = 2\pi \Rightarrow$$

$$10t + t^2 = 2\pi$$

$$t^2 + 10t - 2\pi = 0 \quad \begin{cases} t_1 = 0{,}59\ \text{s} \\ t_2 = -10{,}59\ \text{s} \end{cases}$$

La solución significativa es: $t = 0{,}59$ s

Reemplazando este valor de *t* en ecuación (1), se obtiene para el ángulo de encuentro:

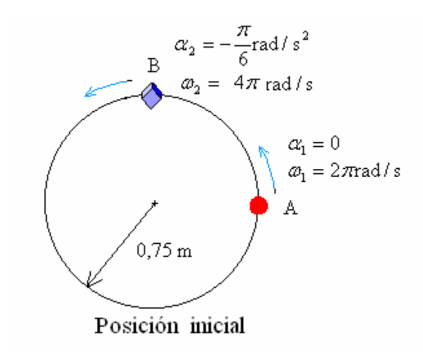
$\theta_{encuentro} = 5{,}9\ \text{rad} = 338{,}04^\circ$.

Ejemplo 8. Dos vehículos describen la misma trayectoria circular de radio 0,75 m. El primero está animado de un movimiento uniforme cuya velocidad angular es de 60 rpm. y sale de la posición A cuando se empieza a contar el tiempo. El segundo móvil está animado de un movimiento uniformemente acelerado cuya aceleración angular vale - $\pi/6$ rad/s^2, pasa por B dos segundos más tarde llevando una velocidad angular de 120 rpm.

a) Escribir las ecuaciones del movimiento de cada uno de los móviles. Hallar el instante y la posición de encuentro por primera vez de ambos móviles.

b) La velocidad lineal, la velocidad angular, las componentes tangencial y normal de la aceleración de cada uno de los móviles en el instante de encuentro.

c) Realícese un esquema en el que se especifique los vectores velocidad, aceleración, en dicho instante de encuentro.



Solución.

a) Para *t* = 2 s el móvil 1 como su velocidad angular es 2π rad/s estará en el punto A, y podemos considerar ese instante como tiempo inicial, con lo que:

Móvil 1:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \omega_1 = 2\pi\ \text{rad/s} \\ \theta_1 = 2\pi t\ \text{rad} \end{cases}$$

Móvil 2:

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\frac{\pi}{6}\ \text{rad/s}^2 \\ \omega_2 = \left(4\pi - \frac{\pi}{6}t\right)\text{rad/s} \\ \theta_2 = \left(\frac{\pi}{2} + 4\pi t - \frac{\pi}{12}t^2\right)\text{rad} \end{cases}$$

Los móviles se encontrarán cuando $\theta_1 = \theta_2$

$$2\pi t = \frac{\pi}{2} + 4\pi t - \frac{\pi}{12}t^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{12}t^2 - 2\pi t - \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\Rightarrow t^2 - 24t - 6 = 0$$

Resolviendo $\begin{cases} t = -0{,}25\ \text{s} \\ t = 24{,}25\ \text{s} \end{cases}$

La solución es 24,25 s.

El punto de encuentro es

$$\theta_1 = 2\pi(24{,}25) = 48{,}5\pi\ \text{rad}$$

$$\theta_2 = 0{,}5\pi + 4\pi(24{,}25) - \frac{\pi}{12}(24{,}25)^2 = 48{,}5\pi\ \text{rad}$$

Los valores son iguales, tal como esperábamos.

Como $\theta_1 = \theta_2 = 48{,}5\pi$ rad, equivalente a 24 vueltas mas 1/4 de vuelta, el encuentro es en punto B.

b) La velocidad lineal, la velocidad angular, las componentes tangencial y normal de la aceleración de cada uno de los móviles en el instante de encuentro.

Móvil 1

$$\begin{cases} \omega_1 = 2\pi\ \text{rad/s} \\ v_1 = \omega_1 r = 1{,}5\pi\ \text{m/s} \\ \alpha_1 = 0 \rightarrow a_{t1} = \alpha_1 r = 0 \\ a_{n1} = \omega_1^2 r = 3\pi^2\ \text{m/s} \end{cases}$$

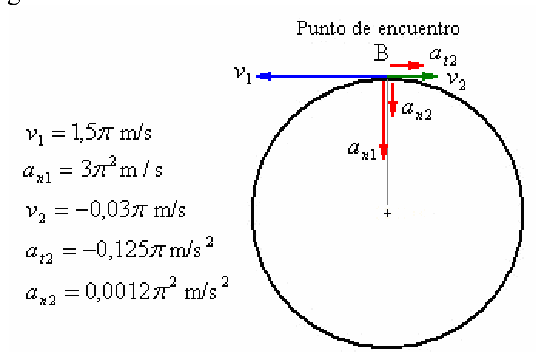
Móvil 2

$$\begin{cases} \omega_2 = 4\pi - \pi \dfrac{24,25}{6} = -0,04\pi \text{rad/s} \\ v_2 = \omega_2 r = -0,03\pi \text{ m/s} \\ a_{t2} = \alpha_2 r = -0,125\pi \text{ m/s}^2 \\ a_{n2} = \omega_2^2 r = 0,0012\pi^2 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

El móvil 2 tiene velocidad negativa, porque a l tiempo t = 24 s su velocidad se hizo cero e inicia el retorno, al tiempo t = 24,25 s se produce el encuentro.

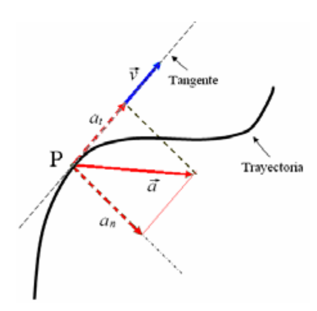
c) Esquema especificando los vectores velocidad, aceleración, en el instante de encuentro.

En el instante del encuentro el esquema sería el siguiente:

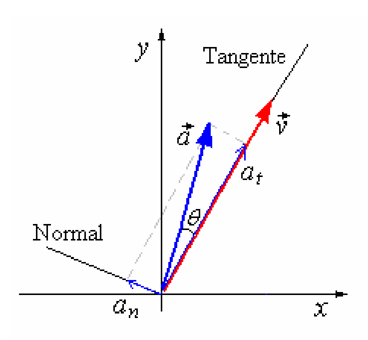


MOVIMIENTO CURVILÍNEO

El movimiento curvilíneo es aquel en el que pueden combinarse tramos rectos y/o curvos. La extensión de las ecuaciones en el sistema intrínseco es inmediata sufriendo sólo una ligera modificación respecto a la aceleración. Esta adopta la expresión $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\hat{t} + \dfrac{v^2}{\rho}\hat{n}$ donde ρ es el denominado radio de curvatura y corresponde al radio de una hipotética circunferencia en cada uno de los puntos de la trayectoria. Es evidente que en el caso del movimiento circular éste no varía ya que coincide con el radio de la circunferencia en cada uno de esos puntos. $a_t = \dfrac{dv}{dt}$ y $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$



La figura siguiente muestra la velocidad y la aceleración con las coordenadas x e y para un determinado instante.



Como $a_t = a\cos\theta$ m/s^2 y $a_n = a\,\text{sen}\theta$ m/s^2,

La aceleración tangencial en cualquier instante, se obtiene a partir del producto escalar del vector aceleración $\vec{a}$ y el vector velocidad $\vec{v}$.

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = va\cos\theta = va_t$$

$$a_t = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

La aceleración normal, se obtiene a partir del módulo de la aceleración a y de la aceleración tangencial a_t.

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = a_n^2 + a_t^2$$

$$\Rightarrow a_n^2 = a_x^2 + a_y^2 - a_t^2$$

$$a_n^2 = a_x^2 + a_y^2 - \left(\frac{v_x a_x + v_y a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}\right)^2$$

Finalmente $a_n = \dfrac{v_y a_x - v_x a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$

El radio de curvatura

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n}$$

Ejemplo 9. El vector velocidad del movimiento de una partícula viene dado por $\vec{v} = (3t - 2)\hat{i} + (6t^2 - 5)\hat{j}$ m/s. Calcular las

componentes tangencial y normal de la aceleración y el radio de curvatura en el instante t =2 s.

Solución.

$$v_x = (3t - 2) \text{ m/s} \Rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = 3 \text{ m/s}^2$$

$$v_y = (6t^2 - 5) \text{ m/s} \Rightarrow a_y = \frac{dv_y}{dt} = 12t \text{ m/s}^2$$

En el instante t = 2 s

$$\begin{cases} v_x = 4 \text{ m/s} & a_x = 3 \text{ m/s}^2 \\ v_y = 19 \text{ m/s} & a_y = 24 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

$$v = \sqrt{4^2 + 19^2} = 19{,}49 \text{ m/s}$$

$$a = \sqrt{3^2 + 24^2} = 24{,}19 \text{ m/s}^2$$

La aceleración tangencial es:

$$a_t = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \frac{4(3) + 19(24)}{19{,}49} = 24 \text{ m/s}^2$$

La aceleración normal es:

$$a_n = \frac{v_y a_x - v_x a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \frac{19(3) - 4(24)}{19{,}49} = -2 \text{ m/s}^2$$

El radio de curvatura

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n}$$

$$a = \sqrt{3^2 + 24^2} = 24{,}19 \text{ m/s}^2$$

$$v = \sqrt{4^2 + 19^2} = 19{,}49 \text{ m/s}$$

$$v^2 = 377, \; a_n = -2 \text{ m/s}^2$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{377}{2} = 188{,}5 \text{ m}$$

Ejemplo 10. Una partícula se mueve de modo que sus coordenadas cartesianas están dadas como funciones del tiempo

$x = 3t$, $y = 2t - 5t^2$

Determine

a) las componentes cartesianas de la velocidad y de la aceleración.

b) las componentes normal y tangencial de la velocidad y aceleración.

c) la ecuación de la trayectoria en coordenadas cartesianas.

Solución.

$x = 3t$, $y = 2t - 5t^2$

a) $v_x = 3$; $v_y = 2 - 10t$; $a_x = 0$; $a_y = -10$;

b) $$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{3\hat{i} + (2 - 10t)\hat{j}}{\sqrt{9 + (2 - 10t)^2}},$$

$$\hat{n} = \hat{t} \times \hat{k} = \frac{-3\hat{j} + (2 - 10t)\hat{i}}{\sqrt{9 + (2 - 10t)^2}}$$ entonces

$$v_t = \vec{v} \cdot \hat{t} = v = \sqrt{9 + (2 - 10t)^2}$$

$$v_n = 0$$

$$a_T = \vec{a} . \hat{t} = \frac{-10t(2 - 10t)}{\sqrt{9 + (2 - 10t)^2}}$$

$$a_T = \vec{a} . \hat{t} = \frac{-10t(2 - 10t)}{\sqrt{9 + (2 - 10t)^2}}$$

$$a_n = \vec{a} \cdot \hat{n} = \frac{30}{\sqrt{9 + (2 - 10t)^2}}$$

c) $$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{9}x^2$$

Ejemplo 11. Una partícula se mueve en el plano xy de acuerdo con la ley $a_x = 0$, $ay = 4\cos(2t)$ m/s^2. En el instante t = 0, el móvil se encontraba en x = 0, y = -1 m, y tenía la velocidad vx = 2, v_y = 0 m/s.

a) Hallar las expresiones de r(t) y v(t).

b) Dibujar y calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante $t = \pi/6$ s.

Solución.

a) En $t = 0$

$$a_x = 0, \; v_x = 2\frac{m}{s}, \; x = 0$$

$$a_y = 4\cos(2t)\frac{m}{s^2}, \; v_y = 0, \; y = -1 \quad \text{m}$$

En el eje x el movimiento es uniforme $v_x = 2\frac{\text{m}}{s}$,

$x = 2t$ m

Para encontrar el movimiento en *y* hay que integrar

$$\int_0^{v_y} v_y = \int_0^t 4\cos(2t)dt \Rightarrow v_y = 2\text{sen}(2t)\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

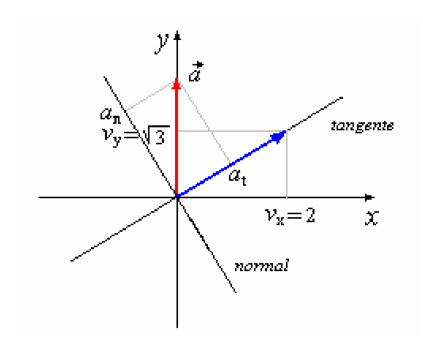
$$\int_{-1}^{y} dy = \int_0^t 2\text{sen}(2t)dt \Rightarrow y - (-1) = 1 - \cos(2t)$$

$$\Rightarrow y = -\cos(2t)\,\text{m}$$

b) Las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante $t = \pi/6$ s.

$$v_x = 2,\; a_x = 0$$

$$v_y = \sqrt{3},\; a_y = 2$$



$$a_t = 2\cos\theta = 1{,}31\frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$a_n = 2\text{sen}\theta = 1{,}51\frac{\text{m}}{\text{s}^2},\; \tan\theta = \frac{v_x}{v_y} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\theta = 49{,}1^\circ$$

Ejemplo 12. Un móvil se mueve en el plano *xy* con las siguientes aceleraciones: a_x=2 m/s^2, a_y=10 m/s^2. Si en el instante inicial parte del origen con velocidad inicial v_x = 0 y v_y =20 m/s.

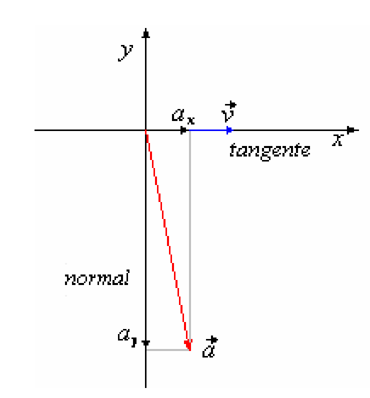
Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración, y el radio de curvatura en el instante *t* = 2 s.

Solución.

$$a_y = -10\frac{m}{s^2} \quad v_y = 20 + (-10)t$$

$$a_x = 2\frac{m}{s^2} \quad v_x = 2t$$

Para t = 2 s $\begin{cases} v_y = 0 \\ v_x = 4 \end{cases}$



$$a_t = a_x = 2\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad a_n = a_y = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4^2}{10} = 1{,}6\text{m}$$

Ejemplo 13. El vector velocidad del movimiento de una partícula viene dado por $\vec{v} = (3t-2)\hat{i} + (6t^2-5)\hat{j}$ m/s.

Si la posición del móvil en el instante *t* = 1 s es $\vec{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$ m. Calcular

a) El vector posición del móvil en cualquier instante.

b) El vector aceleración.

c) Las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante *t* = 2 s.

Dibujar el vector velocidad, el vector aceleración y las componentes tangencial y normal en dicho instante.

Solución.

a) Para el movimiento horizontal

$$v_x = 3t - 2 \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = 3\frac{m}{s^2}$$

Como $v_x = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x dt$, integrando

$$\int_3^t dx = \int_1^t (3t-2)dt \Rightarrow$$

$$x = \left(\frac{3}{2}t^2 - 2t + \frac{7}{2}\right)\text{m}$$

Para el movimiento vertical

$$v_y = 6t^2 - 5 \quad \Rightarrow \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 12t\frac{m}{s^2}$$

Como $v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow dy = v_y dt$, integrando

$$\int_{-2}^t dy = \int_1^t (6t^2-5)dt \Rightarrow y = (2t^3 - 5t + 1)\text{m}$$

$$\vec{r} = \left(\frac{3}{2}t^2 - 2t + \frac{7}{2}\right)\hat{i} - (2t^3 - 5t + 1)\hat{j}$$

b) $\vec{a} = 3\hat{i} + 12t\hat{j}$

c) Para $t = 2$ s

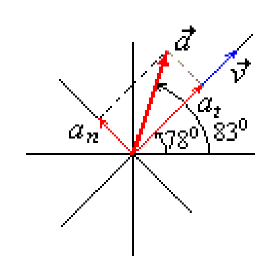
$v_x = 4$ m/s, $v_y = 19$ m/s

$a_x = 3$ m/s^2, $a_y = 24$ m/s^2

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 24{,}2\text{m/s}^2$$

$$\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{19}{4} = 4{,}75 \Rightarrow \varphi = 78^o$$

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{24}{3} = 3 \Rightarrow \theta = 83^o$$



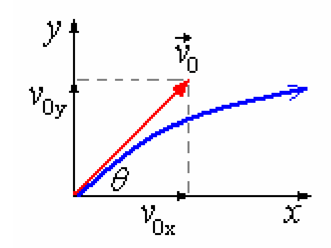
$$a_t = a\cos(\theta - \varphi) = 24{,}1\text{m/s}^2$$

$$a_n = a(\text{sen}\theta - \varphi) = 2\text{m}$$

MOVIMIENTO PARABÓLICO.

Considere un objeto que se desplaza en el aire sin ninguna fuerza con excepción de la gravedad y de la resistencia del aire. La fuerza de la gravedad produce una aceleración constante hacia abajo de magnitud 9,80 m/s^2. Como primera aproximación, no tomemos los efectos del aire y de variaciones en g. Asumiremos que la tierra es plana para el rango horizontal de los proyectiles. A pesar de estas simplificaciones, podemos aún obtener una descripción bastante buena del movimiento del proyectil. El recorrido de un proyectil se llama su trayectoria.

Si se desprecia la resistencia del aire, no hay entonces aceleración en la dirección horizontal, y $a_x = 0$. La aceleración en la dirección de y es debido a la gravedad. Es constante y dirigida hacia abajo, así que $a_y = -g$. Es conveniente elegir $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$ (es decir, poner el origen en el punto donde el proyectil comienza su movimiento). Además, nos referimos típicamente a v_0 como la rapidez inicial del proyectil. Si el proyectil es lanzado con un ángulo θ sobre la horizontal, la velocidad inicial en la dirección x y la velocidad inicial en la dirección y se pueden expresar en términos de g y de y θ usando la trigonometría.



$$v_{0x} = v_0\cos\theta, \quad v_{0y} = v_0\text{sen}\theta$$

$$a_x = 0, \quad a_y = -g$$

Con esto:

$$v_x = v_0\cos\theta = \text{constante}, \quad v_y = v_0\text{sen}\theta - gt$$

$$x = (v_0\cos\theta)t, \quad y = (v_0\text{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Ecuación de la trayectoria.

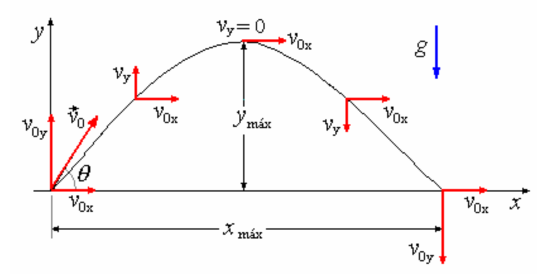
De la ecuación para x obtenemos $t = \frac{x}{v_0\cos\theta}$.

Sustituyendo en la ecuación para y

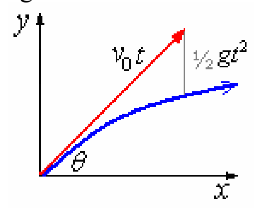
$$y = (\tan\theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$

Corresponde a la ecuación de una parábola que pasa por el origen. Una característica dominante del movimiento del proyectil es que el movimiento horizontal es independiente del movimiento vertical. Así un proyectil se mueve a una velocidad constante

en la dirección horizontal, independiente de su movimiento vertical. Esto se ilustra en la figura.



Podemos entender mejor el significado de la ecuación $y = (v_0 \text{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$ viendo el movimiento del proyectil de esta manera: Primero, si no hubiera fuerza de la gravedad y aceleración hacia abajo, en el tiempo t el proyectil movería una distancia $v_0 t$ en una línea inclinada recta. Si ahora imaginamos con la gravedad el efecto sería hacer que el proyectil se aleje de la trayectoria recta por una distancia ½ gt^2. De la superposición de estos dos efectos resulta la trayectoria parabólica como se muestra en la figura.



Tiempo de vuelo. Poniendo $y = 0$

$$y = (v_0 \text{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \text{, despejando } t,$$

$$t^2 - \frac{2v_0 \text{sen}\theta}{g} t = 0$$

Resolviendo obtenemos dos soluciones $t = 0$, que corresponde al disparo del proyectil y

$$t = \frac{2v_0 \text{sen}\theta}{g}$$

El valor máximo de t se obtiene para $\theta = 90°$. Cuando el proyectil se lanza verticalmente hacia arriba, describiendo una trayectoria rectilínea a lo largo del eje y.

El alcance horizontal de cada uno de los proyectiles se obtiene para $y = 0$.

$$x_{máx} = (v_0 \cos\theta)t = (v_0 \cos\theta)\left(\frac{2v_0 \text{sen}\theta}{g}\right)$$

$$= \frac{v_0^2 \text{sen}(2\theta)}{g}$$

La altura máxima que alcanza un proyectil se obtiene con $v_y = 0$.

$v_y = v_0 \text{sen}\theta - gt = 0$, despejando t.

$t = \frac{v_0 \text{sen}\theta}{g}$, como vemos es igual a la mitad del tiempo de vuelo.

$$y_{máx} = (v_0 \text{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

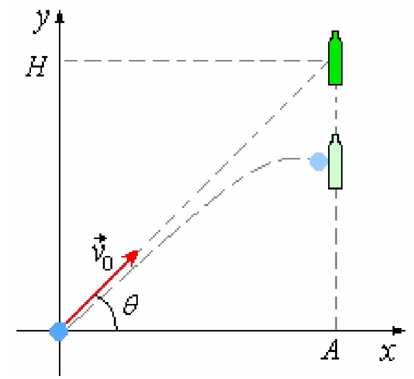
$$= (v_0 \text{sen}\theta)\left(\frac{v_0 \text{sen}\theta}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \text{sen}\theta}{g}\right)^2$$

Finalmente:

$$y_{máx} = \frac{v_0^2 \text{sen}^2\theta}{2g}$$

Su valor máximo se obtiene para el ángulo de disparo $\theta = 90°$.

Ejemplo 14. UN BLANCO EN CAÍDA LIBRE (Tiro al mono)
Se deja caer una botella desde el reposo en el instante en que una piedra es lanzada desde el origen. Determinar los valores del ángulo y de la velocidad de disparo para que la piedra rompa la botella. (Tómese $g = 9,8$ m/s^2)



Solución.
Movimiento de la piedra: El movimiento curvilíneo de la piedra se realiza bajo la aceleración constante de la gravedad, es decir, es la composición de dos movimientos
- Uniforme a lo largo del eje horizontal

$$\text{Horizontal}\begin{cases} a_{px} = 0 \\ v_{px} = v_0 \cos\theta \\ x_p = v_0 \cos\theta\, t \end{cases}$$

- Uniformemente acelerado a lo largo del eje vertical.

$$\text{Vertical}\begin{cases} a_{px} = -g \\ v_{px} = v_0 \text{sen}\theta - gt \\ y_p = v_0 \text{sen}\theta\, t - gt^2/2 \end{cases}$$

Movimiento de la botella: La botella se mueve verticalmente bajo la aceleración constante de la gravedad.

$a_{bx} = -g$

$v_{bx} = -gt$

$y_b = H - gt^2/2$

Choque de la piedra con la botella: Cuando se produce el choque, la posición de la piedra y de la botella coincide.

$A = v_0 \cos\theta\, t$

$H - gt^2/2 = v_0 \text{sen}\theta\, t - gt^2/2$

$\Rightarrow H = v_0 \text{sen}\theta\, t$

Dividimos la segunda ecuación entre la primera.

$$\tan\theta = \frac{H}{A}$$

Para romper la botella debemos de apuntarla directamente y en el instante en el que se deja caer, se debe lanzar la piedra. La velocidad debe tener un valor mínimo para hacer el recorrido *A*, mientras la botella esté en el aire.

Esto sucede para el tiempo $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, y el recorrido horizontal de la piedra debe cumplir:

$$v_0 \cos\theta \left(\sqrt{\frac{2H}{g}}\right) \geq A \Rightarrow v_0 \geq \frac{A}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2H}}$$

Ejemplo 15. Una bolsa de arena cae del reposo de un globo de aire caliente desde una altura de 124 m está soplando un viento horizontal, y el viento da a bolsa de arena una aceleración horizontal constante de 1,10 m/s^2.

a) Demuestre que la trayectoria de la bolsa de arena es una línea recta.

b) ¿Cuanto tiempo toma para llegar la tierra?

c) ¿Con qué velocidad llega a la tierra?

Solución.

a) $x = \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2x}{a_x}$

$y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t^2 = -\frac{2y}{g}$

De estas ecuaciones, obtenemos:

$\frac{2x}{a_x} = -\frac{2y}{g} \Rightarrow y = -\frac{g}{a_x}x$ Ecuación de una línea recta.

b) En tierra, $y = -124$, tal que

$t^2 = -\frac{2(-124)}{9,8} \Rightarrow t = 5,03\text{ s}$

c) $v_y = v_{0y} - gt = 0 - (9,8)(5,03)$

$= -49,3\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$v_x = v_{0x} + a_x t = 0 + (1,10)(5,03)$

$= 5,53\frac{\text{m}}{\text{s}}$

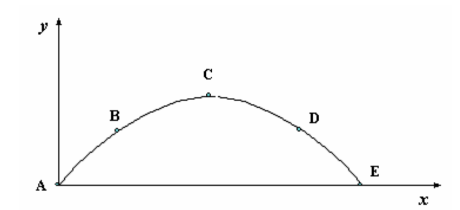
$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(5,53)^2 + (-49,3)^2}$

$= 49,6\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Ejemplo 16. Disparamos un proyectil desde el origen y éste describe una trayectoria parabólica como la de la figura. Despreciamos la resistencia del aire.

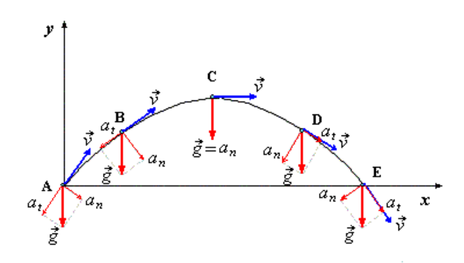
Dibuja en las posiciones A, B, C, D y E el vector velocidad, el vector aceleración y las componentes normal y tangencial de la aceleración. (No se trata de dar el valor numérico de ninguna de las variables, sólo la dirección y el sentido de las mismas)

¿Qué efecto producen a_n y a_t sobre la velocidad?



Solución.

$\vec{v}$ es tangente a la trayectoria



Cuando sube

a_t y $\vec{v}$ tienen sentidos opuestos.

Cuando baja

a_t y $\vec{v}$ tienen el mismo sentido

a_t modifica el módulo de la velocidad con el tiempo.

a_n modifica la dirección de $\vec{v}$

Ejemplo 17. Una bala del rifle se dispara con una velocidad de 280 m/s hacia arriba de una superficie plana inclinada 30° sobre la horizontal. La bala se dispara con un ángulo de elevación inicial de 45° sobre la horizontal (es decir, 15° sobre la superficie plana). ¿Cuál es el alcance de la bala sobre el plano?

Solución.

La ecuación del plano inclinado es

$$\frac{y}{x} = \tan 30° \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

La ecuación de la trayectoria parabólica.

$$y = (\tan\theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$

La intersección de la parábola y la línea recta ocurre cuando

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = (\tan\theta)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

Para $\theta = 45°$: $x = \frac{v_0^2}{g}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Para un triángulo 30°, 60°, 90° vemos que

$$x = S\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}S.$$

De aquí $S = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3} - 1\right)\frac{v_0^2}{g} = 0{,}49\frac{v_0^2}{g}$, arriba del plano.

Con $y_0 = 280$ m/s, $S = 3{,}90$ km.

Ejemplo 18. Se dispara un proyectil desde la cima de una colina de 150 (m) de altura con una rapidez de 180 (m/s) y formando un ángulo de 30º con la horizontal. Calcule:

(a) La distancia horizontal entre el punto de lanzamiento y el punto de caída del proyectil.

(b) La altura máxima del proyectil con respecto al suelo.

(c) Las componentes normal y tangencial de la aceleración al salir en el punto de disparo.

Solución:

$x = 180(\cos \pi/6)t$

$y = 150 + 180(\text{sen } \pi/6)t - 5t^2$

a) Punto de caída

$150 + 180(\text{sen } \pi/6)t - 5t^2 = 0$,

$t = 19{,}5$ s

$x = 180(\cos \pi/6)(19{,}5) = 3039{,}8$m

b) Tiempo para la altura máxima

$180(\text{sen } \pi/6) - 10t = 0$, $t = 9{,}0$ s

entonces

$y_{max} = 150 + 180(\text{sen } \pi/6)(9) - 5(9)^2$

$= 555{,}0$m

El vector unitario tangente es

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{v} = \hat{i}\cos\frac{\pi}{6} + \hat{j}\text{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$\vec{a} = -10\hat{j}$$

Entonces

$$a_t = \vec{a}\cdot\hat{t} = -10\text{sen}\frac{\pi}{6} = -5 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_n^2} = \sqrt{100 - 25} = 8{,}66 \text{ m/s}^2$$

Ejemplo 19. Un cañón de artillería lanza proyectiles con una rapidez de 300 (m/s). El artillero debe darle a un blanco que se encuentra a 8640 (m) detrás de un cerro, cuya altura es de 1000 (m) ubicado a 1200 (m) del cañón. Demuestre que es posible darle al blanco y determine el ángulo de elevación para cumplir el objetivo.

Solución.

Supondremos que damos en el blanco entonces

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = 0$$

$$8649\tan\alpha - \frac{5(8649)^2}{(300)^2\cos^2\alpha} = 0$$

Tiene dos raíces reales

$\alpha_1 = 53{,}03º$

$\alpha_2 = 36{,}97º$

Debemos verificar que el disparo pasa sobre el cerro, para ello evaluamos en ambos ángulos $y_{(1200)}$

$y_{1\,(1200)} = 1373{,}0$ m

$y_{2\,(1200)} = 777{,}95$ m

La altura del cerro es excedida en el primer caso.

Ejemplo 20. Se dispara un proyectil de modo que su alcance horizontal es igual al triple de la altura máxima. Encuentre el ángulo de lanzamiento.

Solución.

Sabemos que

$$x_{max} = \frac{v_0^2\text{sen}2\alpha}{g}$$

$$y_{max} = \frac{v_0^2\text{sen}^2\alpha}{2g}$$

Entonces

$$\frac{v_0^2 \text{sen} 2\alpha}{g} = 3\frac{v_0^2 \text{sen}^2\alpha}{2g}$$

$$\Rightarrow\ 2\cos\alpha = 3\text{sen}\alpha$$

$$\Rightarrow\ \tan\alpha = \frac{2}{3}\ \Rightarrow\ \alpha = 33{,}69^o$$

Ejemplo 21. Un lanza granadas tiene un alcance máximo de 300 m. Para dar en un blanco que se encuentra a una distancia de 400 m del lanza granadas. Determine:
a) La altura mínima que debe subirse el lanza granadas.
b) La rapidez de lanzamiento.
c) El ángulo de lanzamiento,

Solución.
La ecuación de la parábola de seguridad es

$$y = h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Sabemos también que para $h = 0$ la distancia máxima alcanzable es

$$x_{(0)} = \frac{v_0^2}{g} = 300$$

y para una altura h la distancia horizontal máxima será

$$x_{(h)} = \sqrt{\left(v_0^2 + 2hg\right)}\frac{v_0}{g} = 400\text{m}$$

de la primera
b)

$$v_0 = \sqrt{3000} = 54{,}77\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

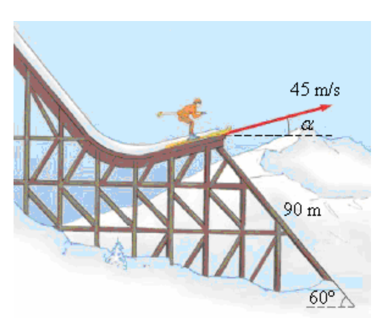
y de $\sqrt{(54{,}77)^2 + 2h(10)}\,\dfrac{54{,}77}{10} = 400$

a)
$h = 116{,}701\text{m}$

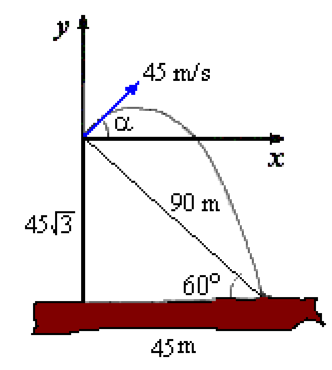
c) El ángulo de lanzamiento cuando el blanco está sobre el límite de la parábola de seguridad es

$\tan\alpha = \dfrac{v_0^2}{gx}$ entonces $\alpha = 36{,}87^o$

Ejemplo 22. Un patinador desciende por una pista helada, alcanzando al finalizar la pista una velocidad de 45 m/s. En una competición de salto, debería alcanzar 90 m a lo largo de una pista inclinada 60º respecto de la horizontal.
a) ¿Cuál será el ángulo (o los ángulos) α que debe formar su vector velocidad inicial con la horizontal?.
b) ¿Cuánto tiempo tarda en aterrizar?
c) Calcular y dibujar las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante $t/2$. Siendo t el tiempo de vuelo. Tomar g =10 m/s²



Solución.
a) y b)



$$a_x = 0 \qquad v_x = 45\cos\alpha$$

$$a_y = -10 \qquad v_y = 45\text{sen}\alpha - 10t$$

$$x = 45\cos\alpha.t$$

$$y = 45\text{sen}\alpha.t - \frac{1}{2}10t^2$$

Punto de impacto $x = 45$, $y = -45\sqrt{3}$

$$\left.\begin{array}{r} 45 = 45\cos\alpha.t \\ -45\sqrt{3} = 45\text{sen}\alpha.t - 5t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$-45\sqrt{3} = 45\text{sen}\alpha.\frac{1}{\cos\alpha} - 5\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\tan^2\alpha - 9\tan\alpha + 1 - 9\sqrt{3} = 0 \ \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = 84{,}5^o \qquad t_1 = 10{,}45s$$

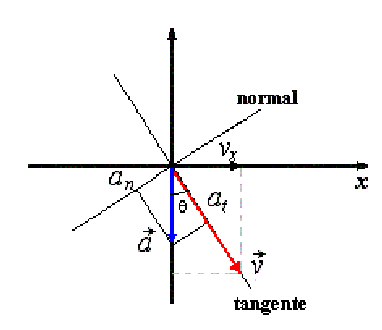
$$\alpha_2 = -54{,}5^o \qquad t_2 = 1{,}72s$$

c) Para $t = \dfrac{t_1}{2}$ $\begin{cases} v_x = 4{,}31 & a_x = 0 \\ v_y = -7{,}46 & a_y = -10 \end{cases}$

$$\tan\theta = \frac{v_x}{|v_y|} \ \Rightarrow\ \theta = 30^o$$

$$a_t = g\cos 30^o = 5\sqrt{3}\ \text{m/s}^2$$

$$a_n = g\text{sen}30^o = 5\ \text{m/s}^2$$



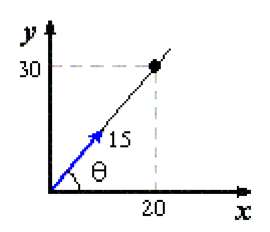
Ejemplo 23. Se deja caer una botella desde el reposo en la posición x =20 m e y =30 m. Al mismo tiempo se lanza desde el origen una piedra con una velocidad de 15 m/s.

a) Determinar el ángulo con el que tenemos que lanzar la piedra para que rompa la botella, calcular la altura a la que ha ocurrido el choque.

b) Dibujar en la misma gráfica la trayectoria de la piedra y de la botella. (Tomar g = 9,8 m/s^2).

Solución:

a)



Movimiento de la botella

$$a_x = 0 \quad v_x = 0 \quad x = 20$$
$$a_y = -9{,}8 \quad v_y = -9{,}8t \quad y = 30 - \frac{1}{2}9{,}8t^2$$

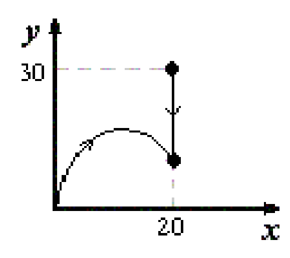
Movimiento de la piedra

$$a_x = 0 \quad v_x = 15\cos\theta$$
$$a_y = -9{,}8 \quad v_y = 15\mathrm{sen}\theta - 9{,}8t$$
$$x = 15\cos\theta t$$
$$y = 15\,\mathrm{sen}\theta t - \frac{1}{2}9{,}8t^2$$

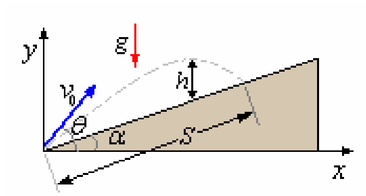
Punto de encuentro

$$20 15\cos\theta . t$$
$$30 - \frac{1}{2}9{,}8t^2 = 15\mathrm{sen}\theta t - \frac{1}{2}9{,}8t^2$$
$$\tan\theta = \frac{30}{20} \quad \theta = 56{,}3^o \quad y = 1{,}69\mathrm{m}$$

b)



Ejemplo 24. Desde un cañón que está sobre un plano inclinado un ángulo α con la horizontal se dispara un proyectil. Este sale con una velocidad v_0 formando un ángulo θ con el plano horizontal.
Encontrar.
a) El punto más alto al que llega el proyectil.
b) El alcance del proyectil.
Solución.



a) $v_{0x} = v_0 \cos\theta \quad v_{0y} = v_0\mathrm{sen}\theta$

$v_y = v_0 sen\theta - gt$

La altura máxima se produce cuando $v_y = 0$

$$y_{máx} = \frac{v_0^2 \mathrm{sen}^2\theta}{2g}$$

Con ese valor,

$$x = v_0 \cos\theta \left(\frac{v_0 \mathrm{sen}\theta}{g}\right) = \frac{v_0^2}{2g}\mathrm{sen}2\theta$$

$$y = x\tan\alpha = \frac{v_0^2}{2g}\mathrm{sen}2\theta\tan\alpha$$

$$h = y_{máx} - y = \frac{v_0^2}{2g}\left(\mathrm{sen}^2\theta - \mathrm{sen}2\theta\tan\alpha\right)$$

b) El alcance máximo S.

$x = v_0 \cos\theta\, t \quad y = v_0 \mathrm{sen}\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2$

Ecuación del plano en función de t $y = x\tan\alpha$

Dividiendo y/x:

$$\frac{y}{x} = \frac{v_0 \text{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2}{v_0 \cos\theta\, t} = \tan\alpha \Rightarrow$$

$$v_0 \text{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 = \tan\alpha\, v_0 \cos\theta\, t$$

Resolviendo encontramos el tiempo para el que el proyectil toca tierra:

$$t = \frac{2v_0}{g}\left(\text{sen}\theta - \cos\theta \tan\alpha\right)$$

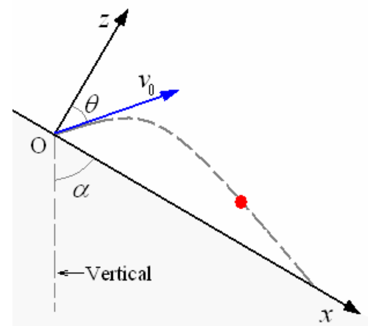
El valor de x cuando el proyectil toca tierra es:

$$x = v_0 \cos\theta\, t = \frac{2v_0^2}{g}\cos\theta\left(\text{sen}\theta - \cos\theta\tan\alpha\right)$$

Y el alcance S es:

$$S = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{2v_0^2}{g}\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}\left(\text{sen}\theta - \cos\theta\tan\alpha\right)$$

Ejemplo 25. La figura muestra una colina inclinada un ángulo α respecto a la vertical y la trayectoria de un proyectil. El proyectil se lanza desde el origen O con una velocidad inicial de módulo v_0 y que forma un ángulo θ con el eje z (perpendicular al plano). El eje x se toma tangente al plano apuntando hacia abajo.
a) Tome el sistema de referencia indicado en la figura y halle las componentes de los vectores aceleración, velocidad y posición del proyectil en función del tiempo.
b) Halle la máxima separación entre el proyectil y la colina.
c) Halle la distancia entre el origen y el punto de caída del proyectil sobre la colina. Demuestre que esa distancia es máxima si $\theta = \alpha / 2$.



Solución.

a) $a_x = g\cos\alpha$, $v_x = g\cos\alpha\, t + v_0\text{sen}\theta$,

$$x = \frac{1}{2} g\cos\alpha\, t^2 + v_0 \text{sen}\theta\, t$$

$$a_z = -g\text{sen}\alpha,\; v_z = -g\text{sen}\alpha\, t + v_0\cos\theta,$$

$$z = -\frac{1}{2} g\text{sen}\alpha\, t^2 + v_0\cos\theta\, t$$

b) La máxima separación ocurre para $v_z = 0$ y vale

$$z = \frac{v_0^2}{2g}\frac{\cos^2\theta}{2\text{sen}\alpha}$$

c) El punto de caída ocurre para $z = 0$ y la distancia vale $x_{(\theta)} = \frac{v_0^2}{g\text{sen}\alpha}\left[\frac{1+\cos 2\theta}{\tan\alpha} + \text{sen}2\theta\right]$

La distancia máxima ocurre para $\frac{dx_{(\theta)}}{d\theta} = 0$.

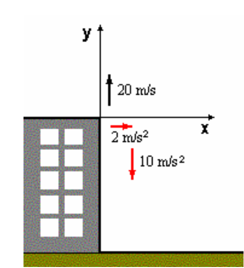
Ejemplo 26. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s desde la azotea de un edificio de 50 m de altura. La pelota además es empujada por el viento, produciendo un movimiento horizontal con aceleración de 2 m/s². Calcular:

a) La distancia horizontal entre el punto de lanzamiento y de impacto.

b) La altura máxima

c) El valor de las componentes tangencial y normal de la aceleración cuando la pelota se encuentra a 60 m de altura sobre el suelo.

Tómese g =10 m/s².



Solución.

$$a_x = 2,\; v_x = 2t,\; x = \frac{1}{2}2t^2$$

$$a_y = -10,\; v_y = 20 + (-10)t,$$

$$y = 20t + \frac{1}{2}(-10)t^2$$

a) Punto de impacto

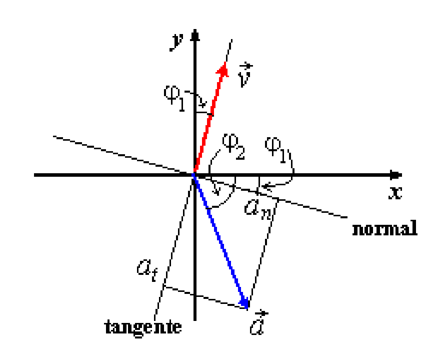
y = -50 $\Rightarrow$ t = 5,74 s $\Rightarrow$ x = 32,97 m

b) altura máxima

$v_y = 0 \Rightarrow t = 2$ s $\Rightarrow y = 20$ m

$h_{\text{máxima}}$ = 70 m sobre el suelo.

c) $h = 60 \Rightarrow y = 10$ m $\Rightarrow t_1 = 0{,}59$ s $t_2 = 3{,}41$ s



$$t_1 = 0{,}59s \begin{cases} v_x = 1{,}17 \\ v_y = 14{,}14 \end{cases} \begin{cases} a_x = 2 \\ a_y = -10 \end{cases}$$

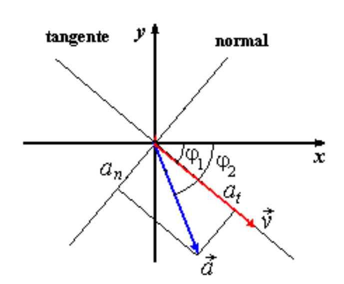
$$a = \sqrt{2^2 + 10^2}$$

$$\tan\varphi_1 = \frac{v_x}{v_y} = \frac{1{,}17}{14{,}14} = 0{,}08 \Rightarrow \varphi_1 = 4{,}7^o$$

$$\tan\varphi_2 = \frac{|a_y|}{a_x} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow \varphi_2 = 78{,}7^o$$

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 73^o$$

$$\begin{cases} a_n = a.\cos\varphi = 2{,}81 \text{ m/}s^2 \\ a_t = a.\text{sen}\varphi = 9{,}80 \text{ m/}s^2 \end{cases}$$



$$t_2 = 3{,}41s \begin{cases} v_x = 6{,}83 \text{ m/s} \\ v_y = -14{,}14 \text{ m/s} \end{cases} \begin{cases} a_x = 2 \\ a_y = -10 \end{cases}$$

$$a = \sqrt{2^2 + 10^2}$$

$$\tan\varphi_1 = \frac{|v_y|}{v_x} = \frac{14{,}14}{6{,}83} = 2{,}07 \Rightarrow \varphi_1 = 64{,}2^o$$

$$\tan\varphi_2 = \frac{|a_y|}{a_x} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow \varphi_2 = 78{,}7^o$$

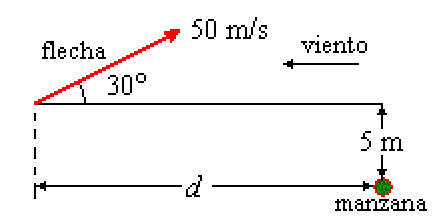
$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 14{,}5^o$$

$$\begin{cases} a_n = a.\cos\varphi = 9{,}87 \text{ m,/}s^2 \\ a_t = a.\text{sen}\varphi = 2{,}55 \text{ m/}s^2 \end{cases}$$

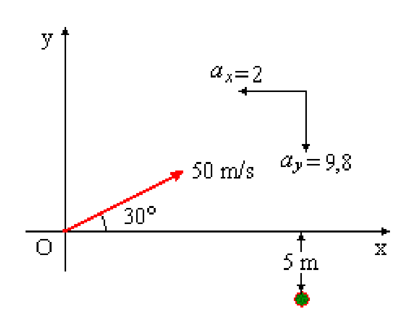
Ejemplo 27. Nos encontramos en la antigua Suiza, donde Guillermo Tell va a intentar ensartar con una flecha una manzana dispuesta en la cabeza de su hijo a cierta distancia *d* del punto de disparo (la manzana está 5 m por debajo del punto de lanzamiento de la flecha). La flecha sale con una velocidad inicial de 50 m/s haciendo una inclinación de 30º con la horizontal y el viento produce una aceleración horizontal opuesta a su velocidad de 2 m/s^2.

a) Calcular la distancia horizontal *d* a la que deberá estar el hijo para que pueda ensartar la manzana.

b) Hállese la altura máxima que alcanza la flecha medida desde el punto de lanzamiento. (g = 9,8 m/s^2)



Solución.



$a_x = -2$, $v_x = 50\cos 30^o - 2t$,

$$x = 50\cos 30^o - \frac{1}{2}2t^2$$

$a_y = -9{,}8$, $v_y = 50\text{sen}30^o - 9{,}8t$,

$$y = 50\text{sen}30^o - \frac{1}{2}9{,}8t^2$$

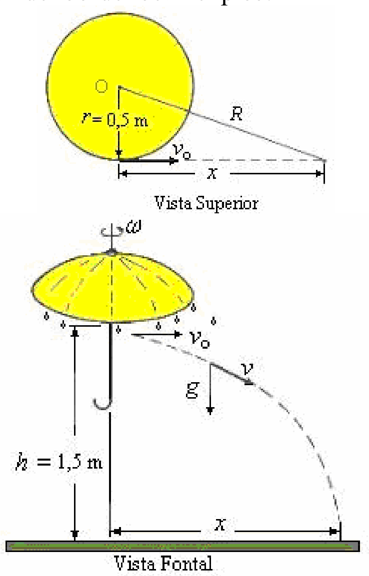
Punto de impacto $x = d$, y = -5

-5 =25 t -4,9 t^2 $\Rightarrow$ t = 5,29 s $\Rightarrow$ x = 201,23 m

Máxima altura $v_y = 0$

50sen30º - 9,8t = 0 $\Rightarrow$ $t = 2{,}55$ s $\Rightarrow$ $y = 31{,}89$ m

Ejemplo 28. Un paraguas abierto mojado se sostiene hacia arriba como se muestra en la figura y se gira sobre la manija a razón uniforme de 21 revoluciones en 44 s. Si el borde del paraguas es un círculo 1 m de diámetro, y la altura del borde sobre el piso es 1,5 m, hallar donde las gotas del agua al hacer girar del borde tocan el piso.



Solución.
La velocidad angular del paraguas es

$$\omega = \frac{21 \times 2\pi \text{rad}}{44 s} = 3\text{rad/s}$$

La velocidad tangencial de las gotas de agua que salen del borde del paraguas es

$$v_0 = r\omega = (0{,}5)(3) = 1{,}5 \text{m/s}$$

Para calcular el tiempo en que la gota llega al piso usamos $h = \frac{1}{2} g t^2$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(1{,}5)}{9{,}8}} = 0{,}553 \text{m}$$

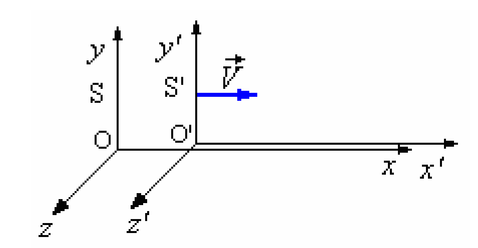
El alcance horizontal de la gota es
$x = v_0 t = (1{,}5)(0{,}55) = 0{,}83$ m;
y el locus de las gotas es un círculo de radio

$$R = \sqrt{(0{,}5)^2 + (0{,}83)^2} = 0{,}97 \text{ m.}$$

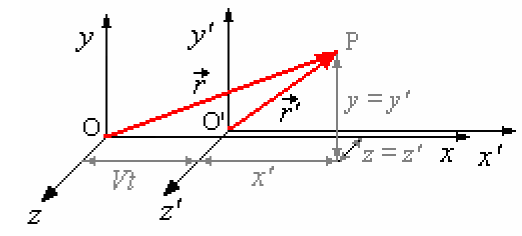
VELOCIDAD Y ACELERACIÓN RELATIVAS.

Movimiento Relativo de Traslación Uniforme. La Relatividad de Galileo

Consideramos dos sistemas de referencia S y S', S' tiene un movimiento de traslación rectilíneo uniforme con respecto a S; S' se aleja de S con una velocidad $\vec{V} = v\hat{i}$



Sea un objeto P determinado por un observador en el sistema S por $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ y por un observador en el sistema S' por $\vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}$ como se muestra en la figura.



Las ecuaciones de transformación de Galileo que relacionan las observaciones desde los sistemas S y S' son

$x = x' + Vt$, $y = y'$, $z = z'$ $t = t'$

Aquí se supone que puede establecerse una escala de tiempo absoluta aplicable a ambos marcos de referencia de manera que $t = t'$. Esto sucedería si la velocidad de la luz fuera infinita (Debemos reconocer que las escalas de tiempo asociadas a dos marcos de referencia no son los mismos si existe movimiento relativo entre ellos es uno de los principios fundamentales de la teoría especial de la relatividad propuesta por Einstein en 1905).
Vectorialmente podemos representar la transformación de Galileo como

$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V} t$.

Derivando las relaciones anteriores podemos obtener la relación de la velocidad.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V \Rightarrow v_x = v'_{x'} + V$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} \Rightarrow v_y = v'_{y'}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} \Rightarrow v_z = v'_{z'}$$

Vectorialmente $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$

Derivando nuevamente obtenemos la relación de la aceleración

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv'_{x'}}{dt} + \frac{dV}{dt} \Rightarrow a_x = a'_{x'} + \frac{dV}{dt}$$

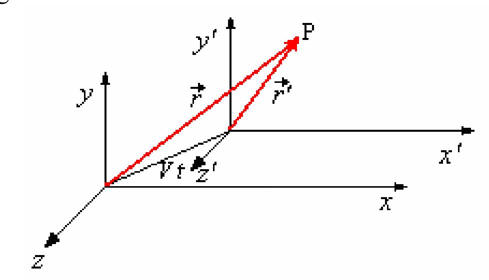
$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv'_{y'}}{dt} \Rightarrow a_y = a'_{y'}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{dv'_{z'}}{dt} \Rightarrow a_z = a'_{z'}$$

Si la velocidad $\vec{V}$ del sistema S' es constante,

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = 0 \text{ y } \vec{a} = \vec{a}'$$

Estas relaciones encontradas son de aplicación general si S y S' están animadas por un movimiento relativo cualquiera, como se muestra en la figura siguiente



Las ecuaciones son:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t \text{ , } \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

Ejemplo 29. Desde la plataforma de un camión en movimiento horizontal $\vec{V}$ constante se lanza un proyectil directamente hacia arriba con una velocidad $\vec{v}_0$. ¿Cómo será visto el movimiento del proyectil por:

a) un observador situado en el camión (sistema S')?

b) un observador situado en el suelo (sistema S)?

Solución.

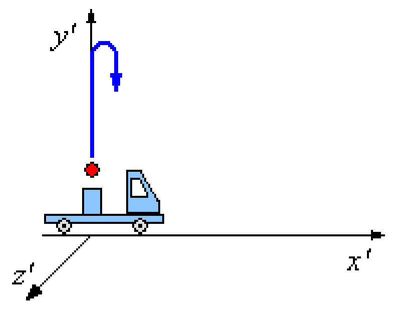
a) El tiempo se mide desde el momento del lanzamiento $t_0 = 0$, cuando el proyectil se eleva con velocidad v_0. La componente horizontal de la velocidad coincide con la velocidad V del camión. El observador O' en el camión verá únicamente la componente vertical $v'_{y'0}$, la componente horizontal será $v'_{x'0} = 0$.

Para un instante *t* cualquiera

$$x' = 0 \qquad y' = v'_{y'0}\,t - ½gt^2$$

$$v'_{x'} = 0 \qquad v'_{y'} = v'_{y'0} - gt$$

$$a'_{x'} = 0 \qquad a'_{y} = -g$$

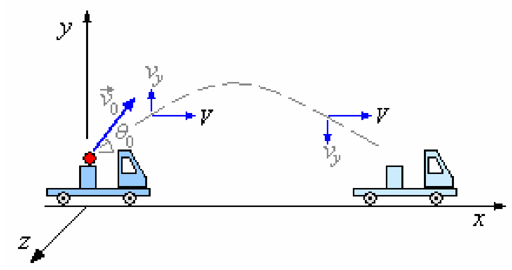


b) Si se observa el mismo proyectil desde un sistema de referencia situado en el suelo S con un origen en el lugar de lanzamiento (para $t_0 = 0$, O = O'), entonces las posiciones, las velocidades y las aceleraciones respecto de O estarán dadas por la transformación de Galileo. En este caso la velocidad inicial v_0 vista desde el suelo será

$$\vec{v}_0 = V\hat{i} + v_{y0}\hat{j} \quad v_0 = \sqrt{V^2 + v_{y0}^2}$$

$$\theta_0 = \tan^{-1}\frac{v_{y0}}{V}$$

La trayectoria será una parábola tal como se ve en la figura siguiente



La componente horizontal del movimiento del proyectil es igual al movimiento del cañón, de modo que cuando cae el proyectil coincidirá con el cañón.

Ejemplo 30. El observador O suelta una piedra del trigésimo piso de un rascacielos. El observador O', descendiendo en un ascensor a velocidad constante de V = 5,0 m/s, pasa el trigésimo piso justo cuando se suelta la piedra. Al tiempo *t* = 3,0 s después de que se suelta la piedra, hallar:

a) La posición, la velocidad, y la aceleración de la piedra relativa a O.

b) La posición, la velocidad, y la aceleración de la piedra relativa a O'.

Solución.

a) Para O, la posición de la piedra está dada por:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Donde *x* = 0 en el trigésimo piso con la dirección hacia abajo como la dirección positiva de *x*. Así, en *t* = 3,0 s,

$$x = 0 + 0 + \frac{1}{2}(9{,}8)(3{,}0)^2 = +\ 44 \text{ m/s}$$

También, $v = v_0 + at$ da

v = 0 + 9,8 m/s^2 x 3,0 s = +29 m/s.

La aceleración de un cuerpo en caída libre, según el observador O que está inmóvil con respecto a la tierra, se sabe que la aceleración gravitacional es constante.
(De hecho, esto es la base de la validez de los dos cálculos anteriores.)
Así tenemos:

$a = +g = +9{,}8\ m/s^2$.

b) O' mide la posición x', relativa a x por medio de la ecuación $x' = x - Vt$.
Luego, después de 3,0 s,

$x' = 44\ m - 5{,}0\ m/s \times 3{,}0\ s = +29\ m$.

Es decir, la piedra se localiza 29 m debajo del observador O' después de 3,0 s.
La velocidad de la piedra relativa a O' es $v' = v - V$; de aquí, en $t = 3{,}0 s$,

$v' = 29\ m/s - 5{,}0\ m/s = +24\ m/s$

Puesto que V es constante, $a' = a$, y $a' = +g = +9{,}8\ m/s^2$.
El observador O' ve la piedra con la misma aceleración vista por O. (en general, las aceleraciones son iguales en todos los sistemas inerciales.)

Ejemplo 31. Un automovilista viaja hacia el oeste sobre la Ruta Interestatal 80 a 80 km/h y es seguido por un auto patrulla que viaja a 95 km/h.
a) ¿Cuál es la velocidad del automovilista respecto al auto patrulla?
b) ¿Cuál es la velocidad del auto patrulla respecto al automovilista?
Solución.
Si el Oeste indica el sentido positivo entonces
a) 80 - 95 = -15 km/h
b) 95 - 80 = 15 km/h

Ejemplo 32. Un río tiene una rapidez uniforme de 0,5 m/s. Un estudiante nada corriente arriba una distancia de 1 km y regresa al punto de partida. Si el estudiante puede nadar con una rapidez de 1,2 m/s en agua tranquila, ¿cuánto dura el recorrido? Compare este resultado con el tiempo que duraría el recorrido si el agua estuviera tranquila.
Solución.
La rapidez absoluta (respecto a la ribera) cuando nada corriente arriba es 1,2 – 0,5 = 0,7 y cuando nada corriente abajo es 1,2 + 0,5 = 1,7 entonces el tiempo de ida y vuelta será

$$t = \frac{1000}{0{,}7} + \frac{1000}{1{,}7} = 2016{,}81\ s = 0{,}56\ h$$

Ejemplo 33. Dos remeros en idénticas canoas ejercen el mismo esfuerzo remando en un río, uno corriente arriba (y se mueve corriente arriba), mientras que el otro rema directamente corriente abajo. Un observador en reposo sobre la orilla del río determina sus rapideces que resultan ser de V_1 y V_2 respectivamente. Determine en términos de los datos la rapidez de las aguas del río.
Solución.
Sea W la rapidez del río y u la rapidez de los botes respecto al agua, (igual en ambos), entonces
$V_1 = u - W$
$V_2 = u + W$
de modo que

$$W = \frac{V_2 - V_1}{2}$$

Ejemplo 34. Un bote cruza un río que mide de ancho a en el cual la corriente fluye con una rapidez uniforme de u. El botero mantiene una orientación (es decir, la dirección en la cual apunta el bote) perpendicular al río y al motor fijo para dar una rapidez constante de v m/s con respecto al agua. De acuerdo a los datos
(a) ¿Cuál es la velocidad del bote respecto a un observador detenido en la orilla?
(b) ¿Hasta dónde estará el bote, medido corriente abajo paralelamente al río, desde la posición inicial hasta cuando alcance la orilla opuesta?
Solución.
a)

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j}$$

b) La componente de la velocidad absoluta perpendicular al río determine el tiempo de cruce de acuerdo a $t = \frac{a}{v}$
Por lo tanto el bote avanza paralelamente al río una distancia

$$d = ut = \frac{u}{v}a$$

Ejemplo 35. Un comprador que está en una tienda puede caminar sobre una escalera mecánica en 30 s cuando está detenida. Cuando la escalera mecánica, funciona normalmente, puede llevar al comprador sin caminar al siguiente piso en 20 s. ¿Cuánto tiempo le tomaría al comprador al subir caminando con la escalera mecánica en movimiento? Suponga que el comprador hace el mismo esfuerzo al caminar sobre la escalera mecánica en movimiento o cuando está parada.
Solución.
Sea L el largo de la escalera. Entonces la velocidad de la persona respecto a la escalera es

$$v' = \frac{L}{30}.$$

Sea v_e la velocidad de la escalera. Ella corresponde a la de la persona cuando no camina, es decir

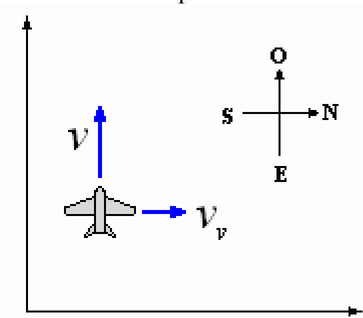
$$v_e = \frac{L}{20}$$

Si la escalera funciona y la persona camina, entonces

$$v = v_e + v' = \frac{L}{20} + \frac{L}{30} = \frac{L}{t}$$

de donde el tiempo será
$t = 12$ s

Ejemplo 36. El piloto de un avión observa que la brújula indica que va dirigiéndose hacia el oeste. La rapidez del avión respecto al aire es de 150 km/h. Si existiera un viento de 30 km/h hacia el norte, calcule la velocidad del avión respecto a la Tierra.



Solución.
La velocidad del viento es v_v= 30 km/h y la rapidez del avión respecto al aire es v'= 150 km/h.
Pero

$$\vec{v} = v\hat{j} = 30\hat{i} + \vec{v}'$$

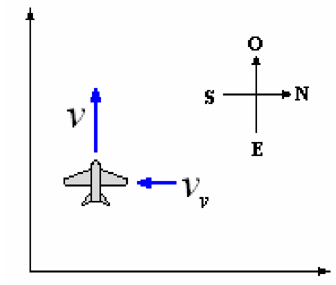
De donde $\vec{v}' = v\hat{j} - 30\hat{i}$

y si tomamos magnitudes

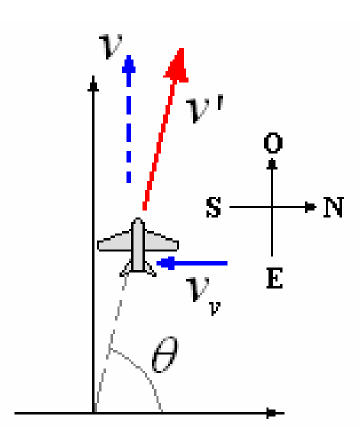
$$150 = \sqrt{v^2 + 30^2} \Rightarrow$$

v = 146,969 km/h

Ejemplo 37. El piloto de un avión desea volar hacia el oeste en presencia de un viento que sopla hacia el sur a 50 km/h. Si la rapidez del avión cuando no sopla el viento es de 200 km/h,
a) ¿en qué dirección debe dirigirse el avión?
b) ¿cuál debe ser su rapidez respecto a la Tierra?



Solución.
La velocidad del viento es v_v = 50 km/h hacia el sur y la rapidez del avión respecto al aire es v' = 200 km/h.
Para poder volar directamente hacia el oeste con respecto a tierra debe compensar el arrastre producido por el viento, tal como se muestra en la figura siguiente.



a) La dirección en la que debe dirigirse el avión está dada por el ángulo θ.

$$\cos\theta = \frac{v_v}{v} = \frac{50}{200} = 0,25 \Rightarrow \theta = 75,5^{\circ}$$

Debe dirigirse 75,5º dirección N-O.
b) Su velocidad respecto a la Tierra es:

$$\vec{v} = \vec{v}' - 50\hat{i}$$

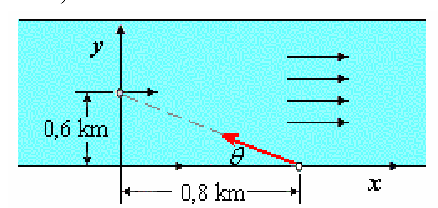
Y su rapidez respecto a tierra es:

$$v = \sqrt{v'^2 - 50^2} = \sqrt{200^2 - 50^2}$$

= 193,6 km/h

Ejemplo 38. Un niño en peligro de ahogarse en un río está siendo llevado corriente abajo por una corriente que fluye uniformemente con una rapidez de 2,5 km/h. El niño está a 0,6 km de la orilla y a 0,8 km corriente arriba de un embarcadero cuando un bote de rescate se pone en camino.
a) si el bote procede a su rapidez máxima de 20 km/h con respecto al agua, ¿cuál es la dirección, relativa a la orilla, que deberá tomar el conductor del bote?
b) ¿Cuál es el ángulo que hace la velocidad, v, del bote con respecto a la orilla?
c) ¿Cuánto tiempo le tomará al bote para alcanzar al niño?
Solución.
a) Considerando al bote y al niño dentro del río se encuentran en un sistema inercial S'.
En este sistema el niño esta en reposo y el bote se mueve con su velocidad, para poder alcanzar en el menor tiempo el bote de enfilar con un ángulo relativo a la orilla dado por:

$$\tan\theta = \frac{0,6}{0,8} = 1,5 \Rightarrow \theta = 37^{\circ}$$



b) La velocidad del bote v, con respecto a la orilla

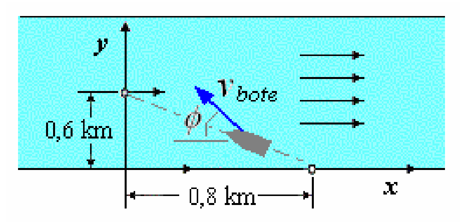
$$v_x = -20\cos 37^{\circ} + 2,5 = -13,5 \quad (1)$$

$v_y = 20\text{sen}37^o = 12$ (2)

Dividiendo (2) : (1)

$$\frac{v_x}{v_y} = \tan\phi = \frac{12}{-13,5} = -0,89$$

$$\Rightarrow \phi = -41^o$$



c) El tiempo que le tomará al bote para alcanzar al niño:

$$d = vt \Rightarrow t = \frac{d}{v}$$

Siendo v = 20 km/h y

$$d = \sqrt{0,8^2 + 0,6^2} = 1,0 \text{ km}$$

$$t = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ h} = 3 \text{ min}$$

Ejemplo 39. Desde el techo del carro de un tren que está acelerando hacia el norte a una razón de 2,5 m/s^2 se suelta y cae un perno. ¿Cuál es la aceleración del perno con respecto a:

a) el carro del tren?

b) la estación?

Solución:

Si y es la vertical hacia arriba y x es la dirección de la aceleración del tren, entonces

a)

$$\vec{a}' = -2,5\hat{i} - 9,8\hat{j}.$$

b)

$$\vec{a} = -9,8\hat{j}$$

Ejemplo 40. Un estudiante de la Facultad de Ingeniería pasea sobre el vagón de un tren que viaja a lo largo de una vía horizontal recta a una rapidez constante de V m/s. El estudiante lanza una pelota al aire a lo largo de una trayectoria que inicialmente forma un ángulo de α^o con la horizontal y está en línea con la vía. El profesor del estudiante, que está parado cerca sobre la tierra, observa que la pelota sale verticalmente. ¿Qué altura subirá la pelota?

Solución.

Si V' es la rapidez inicial de lanzamiento relativa al tren, entonces en la dirección x tenemos:

$V_x = V'\cos\alpha \quad V = 0$

Porque el profesor observa que sale verticalmente.

$$V' = \frac{V}{\cos\alpha}$$

Luego

$V_y = V'_y = V'\sin\alpha = V\cot\alpha$

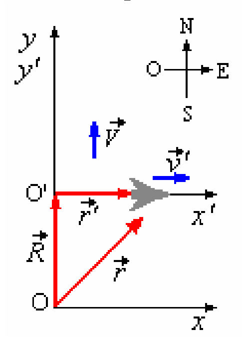
Subirá una altura h dada por

$$h = \frac{V^2\cot^2\alpha}{2g}$$

Ejemplo 41. La brújula de un avión indica que se está dirigiendo hacia el este con una velocidad de 400 km/h. La información de tierra indica que el viento sopla hacia el norte con una velocidad de 300 km/h. ¿cuál es la velocidad del avión con respecto a tierra?

Solución.

En este caso tenemos dos sistemas, el sistema tierra (S) y el sistema aire (S') que se mueve con una velocidad de 300 km/h respecto a tierra.



$$\vec{V} = 300\hat{j}$$

$$\vec{v}' = -400\hat{i}$$

$$\vec{R} = \vec{V}t$$

$$\vec{r}' = \vec{v}'t$$

La posición del avión visto desde O es

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' = \vec{V}t + \vec{r}'$$

La velocidad es

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} + \vec{v}'$$

Luego $\vec{v} = 300\hat{j} + 400\hat{i}$

Su magnitud

$$v = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500\frac{km}{h}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{300}{400} = 37^o$$

El avión se dirige hacia el NE formando un ángulo de 37° con la dirección este, el módulo de la velocidad es 500 km/h.

Ejemplo 42. Un nadador recorre una piscina de 100 m en 2 min. Va a nadar en un río observando antes de lanzarse e al agua, que un trozo de madera que flota en ella recorre 20 m en 1 minuto. Calcular el tiempo que tardará el nadador en recorrer 100 m en el río, según vaya a favor o en contra de la corriente.

Solución.

La velocidad del nadador es:

$$v_n = \frac{s}{t} = \frac{100}{2} = 50\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

La velocidad del agua del río es: $v_r = 20\frac{\text{m}}{\text{min}}$

La velocidad nadando a favor de la corriente es:

$v_1 = v_n + v_r = 50 + 20 = 70$ m/min

Y el que tarda en recorrer 100 m es:

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{100}{70} = 1 \text{ min } \ 26 \text{ s}$$

La velocidad nadando en contra de la corriente es:

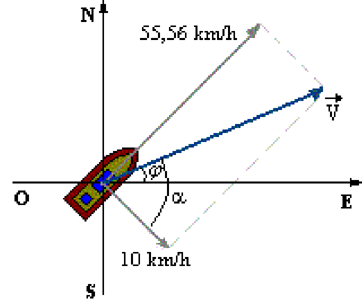
$v_2 = v_n - v_r = 50 - 20 = 30$ m/min

Y el que tarda en recorrer 100 m es:

$$t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{100}{30} = 3 \text{ min } 20 \text{ s}$$

Ejemplo 43. Un acorazado navega con rumbo NE a una velocidad de 50,56 km/h. Suena zafarrancho de combate y uno de los tripulantes marcha corriendo de babor a estribor para ocupar su puesto, a una velocidad de 10 km /h. Calcular el valor de la velocidad resultante y su dirección.

Solución.



$$v_A = 55{,}56\frac{\text{km}}{\text{h}},\ v_T = 10\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$V = \sqrt{55{,}56^2 + 10^2} = 56{,}45 \text{ km/h}$$

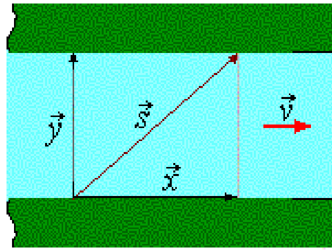
$$\tan\alpha = \frac{55{,}56}{10} \Rightarrow \alpha = 79{,}8$$

$\varphi = 79{,}8 - 45 = 34{,}8$ = 34º 47' 49''

La dirección será 90º - φ = 55º 12' 11''

Ejemplo 44. Una pequeña lancha atraviesa un río de 50 m de. Anchura, al mismo tiempo la corriente lo arrastra 60 m aguas abajo. ¿Qué camino ha recorrido?

Solución.

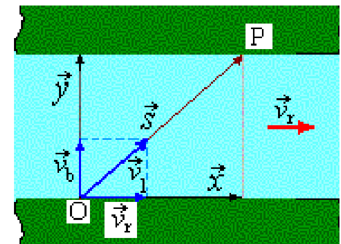


Si en la figura y es el ancho del río y x el avance producido por la corriente, el camino recorrido por la lancha es s.

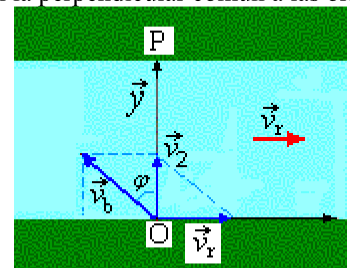
$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{60^2 + 50^2}$$
$= 78{,}1$ m

Ejemplo 45. La velocidad que provocan unos remeros a una barca es de 8 km/h, La velocidad del agua de un río es 6 km/h, y el ancho de tal río 100 m.

a) Suponiendo la posición de la proa perpendicular a las orillas, calcular el tiempo que tarda la barca en cruzar el río y la distancia a que es arrastrada, aguas abajo, por la corriente.



b) ¿En qué dirección debe colocarse la proa de la barca para alcanzar el punto de la orilla opuesta situado enfrente del de partida? (punto de partida y llegada en la perpendicular común a las orillas),



c) ¿Qué velocidad, respecto a la tierra, lleva la barca en los dos casos estudiados?

d) ¿Cuánto tarda en atravesar el río?.

Solución.

a) $v_x = v_r = 6$ km/h, $v_y = v_b = 8$ km/h

$$y = v_y t \Rightarrow t = \frac{y}{v_y} = \frac{0{,}1}{8}\text{h} = 45 \text{ s}$$

La distancia a que es arrastrada por la corriente:

$$x = v_x t = 6 \times \frac{0{,}1}{8}\text{Km} = 75 \text{ m}$$

b) Para que la barca vaya en la dirección de v_2 la componente horizontal de v_b ha de ser igual a 6 km/h.

$$v_b \operatorname{sen}\varphi = v_r \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi = \frac{6}{8}$$

$\Rightarrow \varphi$ = 48º 35'

c) En el primer caso

$v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{6^2 + 8^2}$
= 10 km/h
En el segundo caso:
$v_2 = v_b \cos\varphi$ = 8cos 48º 35'
= 5,3 km/h
d) En el primer caso son 45 s ya calculados.
En el segundo caso:

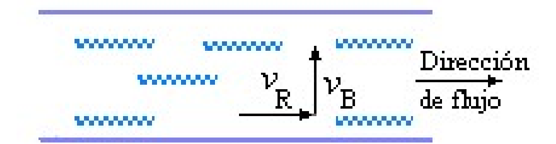
$$t = \frac{y}{v_2} = \frac{0{,}1}{5{,}3}\text{h} = 68 \text{ s}$$

Ejemplo 46. Una canoa de 2,5 m de larga está junto a la orilla de un río y perpendicularmente a ella. Se pone en marcha con una velocidad de 5 m/s y al llegar a la orilla opuesta ha avanzado en el sentido de la corriente 23,4 m.
a) Calcular la velocidad del agua sabiendo que el río tiene una anchura de 100 m.
b) Si la canoa marcha a lo largo del río, determinar el camino recorrido en 1 minuto según vaya en el sentido de la corriente o en sentido contrario.
Solución .
a) La proa de la canoa debe recorrer un espacio en dirección perpendicular al río:
y = 100 – 2,5 = 97,5 m
siendo $y = v_c t$ = 97,5 m
el río arrastra a la canoa x = 23,4 m = $v_r\, t$
dividiendo las dos anteriores

$$\frac{97{,}5}{23{,}4} = \frac{5}{v_r} \Rightarrow v_r = 1{,}2 \text{m/s}$$

b) $v_1 = v_c + v_r$ = 5 + 1,2 = 6,2 m/s
$\Rightarrow x_1$ = 6,2 x 60 =372 m
$v_2 = v_c - v_r$ = 5 - 1,2 = 3,8 m/s
$\Rightarrow x_2$ = 3,8 x 60 =228 m

Ejemplo 47. Un bote de remos se dirige perpendicular a la orilla de un río. Los remos pueden propulsar el bote con una velocidad de 3,0 m/s con respecto al agua. El río tiene una corriente de 4,0 m/s.
(a) Construya un diagrama en el cual las dos velocidades se representen como vectores.
(b) Encuentre el vector que representa la velocidad del bote con respecto a la orilla.
(c) ¿Qué ángulo forma este vector con la dirección en la cual el bote está señalando?
(d) Si el río tiene 100 m de ancho, determínese cuan lejos río abajo del punto del lanzamiento el bote llega al orilla opuesta.
Solución.
Solución:
a) Diagrama.



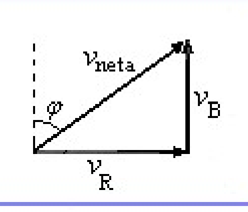
b y c) La velocidad del bote con respecto a la orilla es $\vec{v}_{neta} = \vec{v}_B + \vec{v}_R$.
Como $\vec{v}_B$ y $\vec{v}_R$ son perpendiculares, tenemos

$$v_{neta} = \sqrt{v_B^2 + v_R^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{m/s} .$$

El ángulo φ mostrado en la figura se determina por

$$\tan\varphi = \frac{v_R}{v_B} .$$

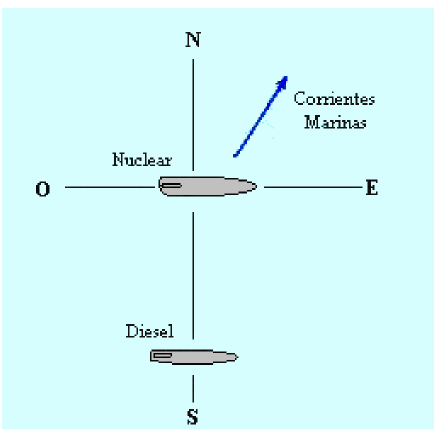
Para las velocidades dadas encontramos $\varphi = 53{,}1^o$.
El bote se mueve a lo largo de una línea dirigida 53,1º río abajo.



d) Haciendo D = distancia río abajo, tenemos

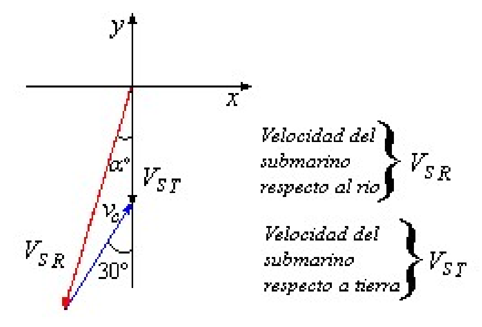
$$\frac{D}{100} = \frac{v_R}{v_B} = \frac{4}{3}$$, tal que D = 133 m.

Ejemplo 48. Un submarino de propulsión convencional (Diesel) sufrió un incendio en el Atlántico norte después de salir de Inglaterra. Debido a un huracán no era posible enviar barcos ni aviones para ayudar al submarino diesel. La marina decidió enviar un submarino de propulsión nuclear para ayudar al de propulsión Diesel. El submarino diesel se encuentra al Sur a 500 km de distancia del submarino nuclear (ver figura). La rapidez del submarino nuclear respecto al agua es de 54 km/h. Además, hay una corriente marina de 36 km/h que se mueve al NE formando un ángulo de 30° respecto al norte. (Asuma que el eje x es el eje DE, y el eje y es el NS).
a) Si V es el módulo de la velocidad del submarino nuclear visto desde tierra, escriba en forma vectorial, usando el sistema de coordenadas x -y, la velocidad del submarino nuclear respecto a tierra para que llegue al submarino diesel y la velocidad de la corriente marina con respecto a tierra.
b) Halle la velocidad del submarino con respecto a la corriente de agua.
c) Calcule el módulo de la velocidad V.
d) Halle el tiempo en el cual los marineros son rescatados.



Solución.

a) Si V es el módulo de la velocidad del submarino nuclear visto desde tierra, escriba en forma vectorial, usando el sistema de coordenadas *x-y*, la velocidad del submarino nuclear respecto a tierra para que llegue al submarino diesel y la velocidad de la corriente marina con respecto a tierra.



b) Halle la velocidad del submarino con respecto a la corriente de agua.

$$\vec{V}_{sR} = -54 \text{ sen } \alpha \hat{i} - 54 \cos \alpha \hat{j} \ ,$$

$$\vec{v}_c = 36\text{sen}30^\circ \hat{i} + 36\cos 30^\circ \hat{j} = 18\hat{i} + 31{,}18\hat{j}$$

$$-54\text{sen}\alpha + 18 = 0 \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{18}{54} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = 0{,}94$$

$$\vec{V}_{sT} = (-54\cos\alpha + 31{,}18)\hat{j}$$
$$= (-50{,}76 + 31{,}18)\hat{j}$$
$$= 19{,}18\hat{j}$$

c) Calcule el módulo de la velocidad V.

19,18 km/hora

d) Halle el tiempo en el cual los marineros son rescatados.

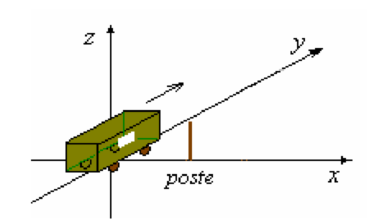
$$t = \frac{d}{V} = \frac{500}{19{,}18}$$
= 26 horas

Ejemplo 49. Desde el interior de un tren que viaja a 108 km/h, un niño lanza un objeto por una ventana con una velocidad de 36 km/h, horizontalmente y perpendicularmente a la marcha del tren, justo en el momento en que pasa en frente de un poste indicador.

a) ¿A qué distancia del poste contada a lo largo de la vía, y a qué distancia de esta chocará el cuerpo con el suelo?

b) Realícese un esquema de la trayectoria seguida por el cuerpo

Dato: la altura inicial del objeto sobre el suelo es de 2,45 m



Solución.

Velocidad del tren $v_y = 108 \dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 30 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$,

Velocidad de la piedra $v_x = 36 \dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 10 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

$g \approx 10 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$

a) El movimiento de la piedra lanzada está dada por las ecuaciones:

$$x = 10t, \ \ y = 30t, \ \ z = 2{,}45 - \frac{1}{2}10t^2$$

Cuando la piedra llega al suelo z = 0

$$z = 0 = 2{,}45 - \frac{1}{2}10t^2 \Rightarrow t = 0{,}7s$$

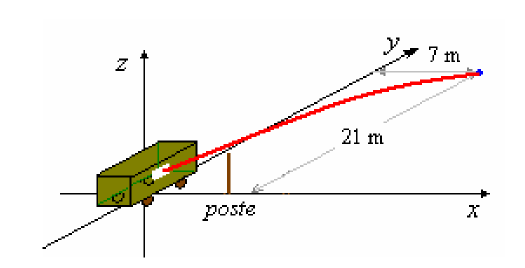
Distancia del poste medida desde la vía:

$y = 30t = 30(0{,}7) = 21\text{m}$

Distancia de la vía al punto de caída:

$x = 10t = 10(0{,}7) = 7\text{m}$

b)



PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. La velocidad de la corriente de un río aumenta en proporción a la distancia de la orilla y alcanza su valor máximo v_0 en el medio. Cerca de la orilla la velocidad es cero. Un bote que navega en el río tiene una velocidad *u* relativa al agua, constante y perpendicular a la corriente.
a) Encontrar la distancia que fue arrastrando el bote al cruzar el río de ancho C.
b) Determinar la trayectoria del bote

Respuesta. a) $d = C\dfrac{v_0}{2u}$

2. Un automovilista entra en una curva de 150 m de radio, una velocidad de 72 km/h. Accionando los frenos hace disminuir su velocidad de modo uniforme a razón de 1,5 m/s^2.
Determinar el módulo de la aceleración del automóvil cuando su velocidad es de 63 km/h.
Respuesta: 2,53 m/s^2

3. Las ecuaciones paramétricas del movimiento de una partícula son $x = R\cos\omega t$, $y = R\text{sen}\omega t$, $z = vt$. *R*, *ω*, *v* son constantes.
Probar que se trata de un movimiento uniforme, dibujar la trayectoria.

Respuesta: Movimiento helicoidal con velocidad angular ω y subiendo con velocidad *v*.

4. Dadas las ecuaciones paramétricas de un movimiento $x = A\text{sen}\omega t$, $y = A\cos\omega t$,
a) Escribir la ecuación del movimiento.
b) La ley horaria
c) La trayectoria

Respuesta. a) $\vec{r} = A\text{sen}\omega t\,\hat{i} + A\cos\omega t\,\hat{j}$, b) $s = \omega At$, c) $x^2 + y^2 = A^2$

5. Dos objetos se mueven en el plano *xy* de acuerdo a $\vec{r}_1 = \left(4t^2 + 3t + 228\right)\hat{i} + \left(2t + 12\right)\hat{j}$ y
$\vec{r}_2 = \left(8t^2 + 11t - 444\right)\hat{i} + \left(5t - 24\right)\hat{j}$
respectivamente.
a) ¿Cuales son la velocidad y aceleración de cada objeto?
b) ¿Dónde y cuando chocan?
Respuesta.
a) $\vec{v}_1 = \left(8t + 3\right)\hat{i} + 2\hat{j}$, $\vec{a}_1 = 8\hat{i}$
$\vec{v}_2 = \left(16t + 11\right)\hat{i} + 5\hat{j}$, $\vec{a}_1 = 16\hat{i}$
b) $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = 840\hat{i} + 36\hat{j}$, $t = 12$

6. Las posiciones de dos partículas P_1 y P_2 están dadas por $\vec{r}_1 = \left(5 + 3t + 2t^2\right)\hat{i}$,
$\vec{r}_2 = \left(t + 5t^2\right)\hat{i}$.
a) ¿En qué instante chocarán las dos partículas?
b) ¿Cuál es la diferencia de velocidades en ese instante?
Respuesta: a) $t = 2$ b) 8

7. El movimiento de una partícula está definido por el vector posición
$\vec{r} = R\text{sen}b\,t\,\hat{i} + Ct\,\hat{j} + R\cos b\,t\,\hat{k}$. Determinar.
a) La velocidad y aceleración de la partícula.
b) La trayectoria de la partícula.
c) El radio de curvatura.

Respuesta. a) $v = \sqrt{C^2 + R^2b^2}$, $a = Rb^2$,
b) Helicoide, c) $\rho = R + \dfrac{C^2}{Rb^2}$

8. El movimiento de una partícula está definido por el vector posición
$\vec{r} = 0{,}1\text{sen}\pi t\,\hat{i} + 0{,}25\cos 2\pi\,t\,\hat{j}$, *r* en metros y *t* en segundos:
a) Determinar la velocidad y aceleración para $t = 1$ s.
b) Demostrar que la trayectoria de la partícula es una parábola.

Respuesta. a) $\vec{v} = -0{,}1\pi\,\hat{i}$ m/s, $\vec{a} = 0$
b) $y = 0{,}025 - 5x^2$

9. La aceleración de un cuerpo es:
$\vec{a} = \left(3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}\right)\text{cm/s}^2$
a) Si el cuerpo parte del reposo ¿Cuál es su velocidad después de 3 segundos?
b) ¿Cuál es su posición después de 10 segundos?
c) ¿Cuál es su rapidez media durante los primeros 10 segundos?
Respuesta. a) $\left(9\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}\right)\text{cm/s}$
b) $\left(150\hat{i} + 100\hat{j} + 50\hat{k}\right)\text{cm}$
c) 18,71 cm/s

10. Si una partícula que se mueve sobre una trayectoria curva tiene una aceleración total en un momento dado $\vec{a} = \left(3\hat{t} + 2\hat{n}\right)\text{cm/s}^2$. Hallar:

a) La aceleración tangencial.
b) La aceleración centrípeta.
c) El módulo de la aceleración total.
d) El ángulo φ que la aceleración total forma con la tangente a la curva.

Respuesta: a) $a_t = 3\,\text{cm/s}^2$

b) $a_c = -4\,\text{cm/s}^2$

c) $a = 5\text{cm/s}^2$

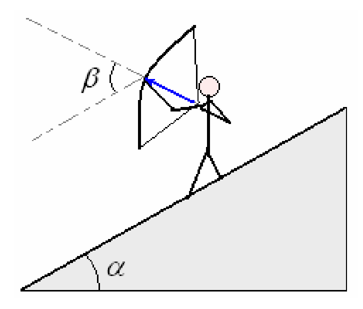
d) $\varphi =\ 53,1^o$

11. Dos cuerpos se lanzan simultáneamente desde un mismo punto con la misma rapidez inicial pero en distintas direcciones, uno verticalmente hacia arriba y el otro formando un ángulo θ = 60° con la horizontal. Conociendo que la rapidez inicial de ambos cuerpos es v_0 = 25 m/s, ¿a qué distancia se encontrarán cuando hayan pasado 1,7 s?

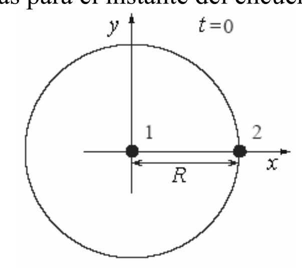
12. Una partícula se mueve en un plano de tal suerte que su radio vector con respecto a un punto fijo barre ángulos iguales en tiempos iguales mientras que la distancia al punto fijo es variable con el tiempo. Escriba las componentes radial y tangencial de la velocidad y la aceleración de la partícula mostrando explícitamente cualquier cantidad que se mantenga constante durante el movimiento.

13. Un tren pasa por una estación con una velocidad de 30 km/h. En el instante en que la locomotora pasa junto al guardagujas este lanza una bolsa a uno de los ingenieros de maquinas. Sabiendo que la rapidez inicial con que el guardagujas lanzó la bolsa fue de 45 km/h
a) ¿Cuál tendrá que ser el ángulo de lanzamiento para lograr el objetivo?.
b) Describa la trayectoria de la bolsa en el sistema de referencia del maquinista.

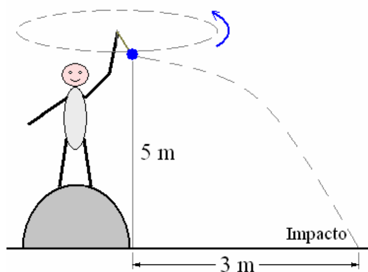
14. Un arquero está en una colina cuya pendiente forma un ángulo α con la horizontal. Si el arquero dispara la flecha según una dirección β respecto a la colina y con velocidad v_0, encontrar la distancia, medida a lo largo de la colina, a la cual caerá la flecha.



15. Dos partículas se encuentran inicialmente en reposo en las posiciones que muestra la figura. Ambas comienzan a moverse al mismo tiempo, la partícula 1 con aceleración constante $\vec{a} = a\hat{j}$, y la partícula 2 con aceleración angular constante α, en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj, describiendo una circunferencia de radio *R*, como se muestra en la figura. Determine en función de *a* y *R*:
a) El tiempo que tardan en encontrarse, suponiendo que lo hacen sobre el eje de las ordenadas, antes que la partícula 2 complete una vuelta completa. Encuentre el valor de α que hace esto posible.
b) Halle los vectores velocidad y aceleración de las dos partículas para el instante del encuentro.



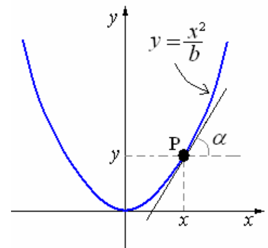
16. Un niño hace girar uniformemente una piedra en un círculo horizontal por medio de una cuerda de 1 *m* de longitud. El niño se encuentra sobre un montículo de tal forma que el plano del movimiento se encuentra a 5 *m* de altura sobre el suelo. La cuerda se rompe y la piedra sale disparada horizontalmente, golpeando el suelo a 3 *m* de distancia. ¿Cuál fue la aceleración centrípeta de la piedra mientras estaba en movimiento circular?



17. Desde un sistema de referencia situado en el suelo, con eje horizontal *x* y vertical *y*, se observa el movimiento de un objeto sometido a una aceleración $a = -2\hat{i} - 6\hat{j}$ (*m/s*). Si en el instante inicial el objeto se encontraba en el punto P = (-3, 2) (m), moviéndose con una velocidad $v_{(t=0)} = 3\hat{j}$ (m/s):
a) Obtenga la ecuación explícita de la trayectoria del objeto.
b) Determine el instante en el que la velocidad y la aceleración son perpendiculares.
c) Calcule las coordenadas del punto más alto de la trayectoria.
d) Calcule el tiempo que tardó el móvil desde que salió del punto P hasta que llegó al suelo.

18. La figura muestra una cuenta p que desliza por un alambre plano en forma de parábola. La ecuación de la parábola es $y = x^2/b$, donde b es una constante positiva con dimensiones de longitud. Llamaremos a

al ángulo entre la tangente a la curva y el eje x. en el punto donde se encuentra la cuenta.
a) Halle $\tan\alpha$ en función de la coordenada x de P.
b) Suponga que la cuenta tiene rapidez v y se mueve hacia la derecha. Halle las componentes x e y de la velocidad de la cuenta en función de y y de la coordenada x de P.
Ayuda: recuerde que el vector velocidad es tangente a la trayectoria.



Respuesta.

a) $\tan\alpha = \dfrac{2x}{b}$

b) $v_x = \dfrac{bv}{\sqrt{b^2+4x^2}}$, $v_y = \dfrac{2xv}{\sqrt{b^2+4x^2}}$

19. Un ascensor parte del reposo y desciende con aceleración constante de 1 m/s^2 respecto a Tierra. Dos segundos después de iniciarse el descenso se cae la lámpara del techo del ascensor. La distancia del techo al piso del ascensor es de 2 m. Definimos el referencial del ascensor como aquél con origen en su techo y dirección y positiva apuntando hacia abajo.
a) Halle los vectores aceleración, velocidad y posición de la lámpara respecto al ascensor.
b) Determine el tiempo que tarda la lámpara en caer.
c) Encuentre la distancia recorrida por el ascensor mientras cae la lámpara.
Respuesta.
Todas las unidades están expresadas en el sistema MKS. L indica lámpara, A ascensor y T Tierra.
a) Tomaremos como $t = 0$ el instante para el cual se desprende la lámpara.

$\vec{a}_{LA} = \vec{a}_{LT} - \vec{a}_{AT} = 9\hat{j}$, $\vec{v}_{LA} = 9t\hat{j}$,

$\vec{r}_{LA} = \frac{9}{2}t^2\hat{j}$

b) $y_{LA} = \frac{9}{2}t^2 = 2 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$

c) $D = \frac{14}{9}$

20. Los instrumentos de un aeroplano en vuelo horizontal indican que se dirige hacia el Este con una rapidez de 300 km/h respecto al aire. En Tierra se observa que el aeroplano se encuentra en medio de una corriente de aire que sopla hacia el Norte con rapidez de 60 km/h. Halle la velocidad y rapidez del avión respecto a Tierra.

Respuesta.
Llamaremos $\hat{E}$ y $\hat{N}$ a los vectores unitarios en dirección Este y Norte respectivamente.

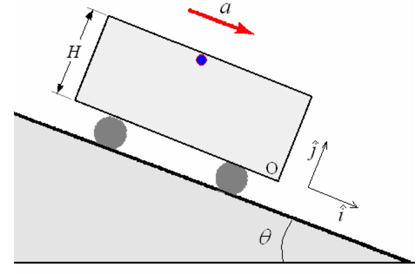
$\vec{v} = \left(300\hat{E} + 60\hat{N}\right)$ km/h, $v = 60\sqrt{26}$ km/h.

21. Un hombre guía su automóvil bajo lluvia a una velocidad constante respecto a Tierra de módulo y dirección. Mientras conduce el hombre observa que la trayectoria de cada gota es una línea recta que se aparta un ángulo α de la vertical y al detenerse observa que la lluvia cae verticalmente y prácticamente con velocidad constante. Halle el vector velocidad de las gotas de lluvia respecto al auto en movimiento y respecto a Tierra (tome vertical hacia arriba).
Respuesta.

$\vec{v}_{gota,Tierra} = -\dfrac{v}{\tan\alpha}\hat{j}$,

$\vec{v}_{gota,Auto} = -\dfrac{v}{\tan\alpha}\hat{j} - v\hat{i}$

22. Un vagón de ferrocarril motorizado va cuesta abajo sobre un plano inclinado un ángulo α. La distancia entre el techo y el piso del vagón es H y su aceleración respecto a Tierra es constante y vale $\vec{a} = a\hat{i}$, ver figura. Un pasajero del vagón observa que una lámpara, situada en el centro del techo del vagón, se desprende y choca con el piso en el punto O (en el extremo inferior del vagón).
a) Halle la aceleración de la lámpara respecto a Tierra y respecto al pasajero del vagón. Exprese sus resultados en términos de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$.
b) Escriba las componentes cartesianas de la velocidad y posición de la lámpara según el pasajero. Torne el origen en el punto o solidario al vagón y llame L a la longitud del vagón.
c) Halle el tiempo que tarda la lámpara en caer y la longitud L del vagón.
d) Determine la ecuación de la trayectoria de la lámpara, $y = y(x)$, según el pasajero. ¿Qué clase de curva es la trayectoria de la lámpara vista por el pasajero y vista desde Tierra?



Respuesta.
Los subíndices L, P y T hacen referencia a la lámpara, al pasajero y al referencial inercial de Tierra respectivamente.

a) $\vec{a}_{LT} = g(\text{sen}\theta\,\hat{i} - \cos\theta\,\hat{j})$,

$\vec{a}_{LP} = (g\text{sen}\theta - a)\hat{i} - g\cos\theta\,\hat{j}$

b) $v_x = (g\text{sen}\theta - a)t$, $v_y = -g\cos\theta\, t$

$x = \frac{1}{2}(g\text{sen}\theta - a)t^2 - \frac{L}{2}$,

$y = -\frac{1}{2}g\cos\theta\, t^2 + H$

c) $t = \sqrt{\frac{2H}{g\cos\theta}}$, $L = \frac{2H(g\text{sen}\theta - a)}{g\cos\theta}$

d) Vista por el pasajero la trayectoria es una línea recta de ecuación

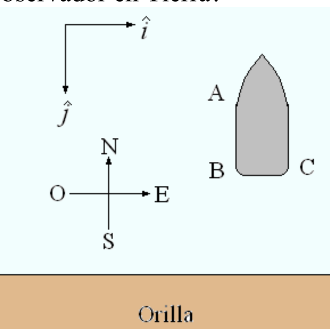
$y = -\frac{g\cos\theta}{g\text{sen}\theta - a}x$

Vista desde Tierra la trayectoria es una parábola.

23. La corriente de un río fluye de Este a Oeste con rapidez constante v = 2 m/s respecto a Tierra. Un bote atraviesa el río y de acuerdo a sus instrumentos de a bordo se mueve respecto al río dirigiéndose al Norte con rapidez constante = 10 m/s. Respecto al bote un pasajero se desplaza sobre la cubierta en línea recta desde el punto A hasta el punto G con una rapidez constante v_1 = 10 m/s. Suponga que BA = 4 m y apunta hacia el Norte y BC = 3 m y apunta hacia el Este.

a) Halle el vector unitario $\hat{u}$ que apunta de A a C y las velocidades del bote y del pasajero respecto a Tierra.

b) Halle el tiempo que tarda el pasajero en ir de A hasta C. ¿Qué distancia recorre el bote en ese tiempo según un observador en Tierra?



Respuesta.

Las letras *b*, *p* y *T* designarán respectivamente el bote, pasajero y Tierra.

a) $\hat{u} = \frac{3\hat{i} + 4\hat{j}}{}$, $\vec{v}_{b,T} = (-2\hat{i} - 10\hat{j})$ m/s,

$\vec{v}_{p,T} = (4\hat{i} - 2\hat{j})$ m/s.

b) $t = \frac{1}{2}s$, $d = \sqrt{26}$m

24. El aro de la figura tiene radio *R* y rueda sobre una superficie horizontal fija a Tierra.

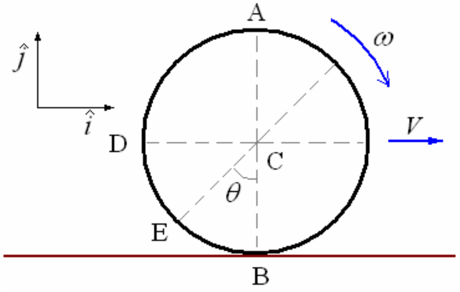
El aro gira en sentido horario mientras su centro e se mueve hacia la derecha con rapidez *V* respecto a la superficie. Considere un observador con origen en C (se traslada con el aro) y que no rota respecto a Tierra. Suponga que todos los plintos del aro tienen rapidez *V* respecto al observador (se dice entonces que el aro rueda sin deslizar).

En la figura se han marcado cuatro puntos para un cierto instante. El punto A es el punto más alto del aro, el B el más bajo, el D el punto del extremo izquierdo y el E con un radio vector que forma un ángulo θ con la vertical.

a) Halle la velocidad angular w del aro.

b) Halle los vectores velocidad de los puntos A, B y D respecto a la superficie.

c) Halle el vector velocidad del punto E respecto a la superficie y diga para qué ángulo θ su módulo es igual a *V*.



Respuesta.

a) La rapidez de cualquier punto del aro respecto a C es $V = R\omega$, luego $\omega = V/R$.

b) $\vec{V}_A = 2V\hat{i}$, $\vec{V}_B = 0$, $\vec{V}_D = V\hat{i} + V\hat{j}$

c) $\vec{V}_E = V(1 - \cos\theta)\hat{i} + V\text{sen}\theta\,\hat{j}$, $|\vec{V}_E| = V$

$\Rightarrow \theta = \pm 60°$

25. Para conocer la rapidez de un avión es necesario determinar cuanto tiempo toma volar en un rizo cerrado de longitud conocida. ¿Cuánto tiempo tomará al avión volar alrededor de un cuadrado de lado *a*, con el viento soplando con una velocidad *u*?, en dos casos:

a) la dirección del viento coincide con uno de los lados del cuadrado;

b) la dirección del viento coincide con la diagonal del cuadrado?

Sin viento la rapidez del avión es *v*, mayor que *u*.

Respuesta,

a) $t_1 = \frac{2a\left(v + \sqrt{v^2 - u^2}\right)}{(v^2 - u^2)}$, b)

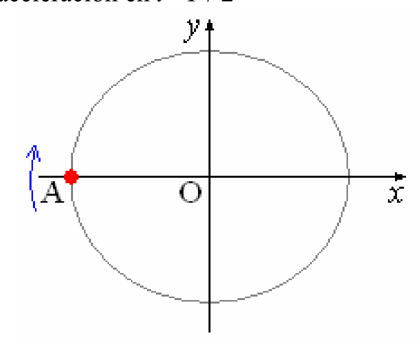
$t_2 = \frac{4a\sqrt{v^2 - u^2/2}}{(v^2 - u^2)}$

26. Un hombre que viaja en un camión intenta golpear un poste con una piedra, y cuando pasa

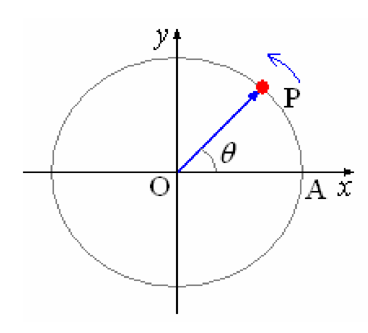
frente a él arroja la piedra con una velocidad horizontal de 20 m/s respecto al camión. Sabiendo que la velocidad del camión es de 40 km/h, Calcular:
a) la dirección en que debe lanzar la piedra.
b) la velocidad horizontal de la piedra respecto al suelo.
Respuesta. a) 56,3º con relación a la dirección trasera del camión
b) 16,63 m/s

27. El piloto A está volando con un avión con una velocidad de 150 km/h, sobrevolando al piloto B, cuyo avión vuela a 135 km/h, 300 m por debajo Con el mismo rumbo. El piloto A para mandar un mensaje a B lo sujeta a una piedra y la arroja a la cabina de B. Sin tomar en cuenta la resistencia del aire.
a) ¿Con qué velocidad deberá lanzarla respecto a su avión cuando B está directamente debajo de él?
b) ¿Cuándo B está todavía a 300 metros delante de l?
Respuesta, a) v = 15 km/h hacia atrás; b) v = 128 km/h hacía adelante.

28. Una partícula describe una circunferencia de radio $R =$ 0,5 m con una frecuencia de 10 r pm. Si en t_0= 0 la partícula está en la posición A moviéndose en el sentido horario, calcular:
a) El período T y la rapidez del movimiento
b) La velocidad media y aceleración media en el intervalo (0; 0,75T).
c) La aceleración en $t = T/2$



29. Una partícula P se mueve con aceleración angular constante sobre una circunferencia de radio R =3m. Parte desde el reposo del punto A y completa la primera vuelta en un tiempo t = 2s.
Calcular:
a) El módulo de la aceleración angular
b) La ecuación $\vec{r} = \vec{r}_{(t)}$.
c) El tiempo que emplea para llegar a la posición definida por $\theta = 3\pi/2$.
d) La velocidad lineal en $\theta = \pi$



30. Un automóvil viaja hacia el Este con una rapidez de 50 km/h. Está lloviendo verticalmente con respecto a la Tierra. Las marcas de la lluvia sobre las ventanas laterales del automóvil forman un ángulo de 60° con la vertical, calcule la velocidad de la lluvia con respecto a:
a) el automóvil y
b) la Tierra.

31. La distancia de A a B es ℓ . Un aeroplano vuela desde A hasta B y vuelve otra vez con una velocidad constante V relativa al aire. Calcular el tiempo, total que empleará en realizar el recorrido si el viento sopla con una velocidad v en las siguientes direcciones:
a) Sobre la línea que une A y B.
b) Perpendicular a esta línea.
c) Formando un ángulo θ con esta línea.
Demostrar que la duración del trayecto siempre aumenta con la existencia del viento.
Respuesta.

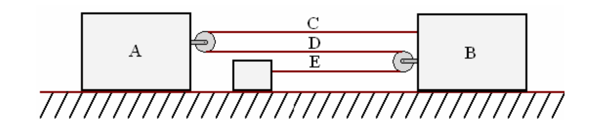
Poniendo $T_0 = \dfrac{2\ell}{V}$, los resultados son:

a) $\dfrac{T_0}{\left(1 - \dfrac{v^2}{V^2}\right)}$

b) $\dfrac{T_0}{\left(1 - \dfrac{v^2}{V^2}\right)^{1/2}}$

c) $T_0 \dfrac{\left[1 - \left(\dfrac{v\text{sen}\theta}{V}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \dfrac{v^2}{V^2}\right)}$

32. El bloque deslizante A se mueve hacia la izquierda a una velocidad constante de $0{,}3\hat{i}$ m/s,
Determinar:
a) La velocidad del bloque B;
b) las velocidades de los tramos de cable C y D;
e) la velocidad relativa de A respecto a D;
d) La velocidad relativa del tramo de cable C respecto al tramo D.

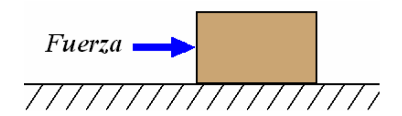


Respuesta.
a) $-0{,}2\hat{i}$ m/s, b) $-0{,}2\hat{i}$ m/s, $-0{,}4\hat{i}$ m/s,
c) $-0{,}1\hat{i}$ m/s, d) $2\hat{i}$ m/s,

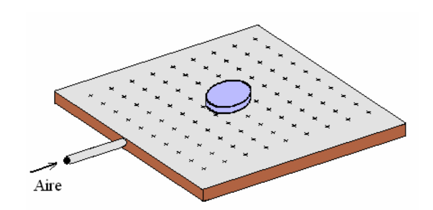
CAPÍTULO 4. Dinámica de una partícula

INTRODUCCIÓN
En el capítulo anterior estudiamos el movimiento de una partícula con respecto a un sistema de referencia sin preguntarnos sobre la causa del movimiento. Lo describimos simplemente en términos de los vectores $\vec{r}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$.
Nuestra discusión fue geométrica, en este capítulo discutiremos la causa del movimiento. Seguiremos tratando a los cuerpos como partículas simples. Posteriormente trataremos sobre sistemas de partículas y cuerpos rígidos.

EL ORIGEN DEL MOVIMIENTO
¿Qué origina el movimiento? ¿Qué detiene el movimiento? ¿Se necesita causa para mover las cosas? ¿Por qué un objeto al que se le da un empujón pronto se detiene? ¿Por qué los planetas mantienen su movimiento alrededor del sol?
Aristóteles joven filósofo griego (siglo IV a.c.) decía que un cuerpo permaneciera en movimiento era necesario ejercer alguna acción sobre él ya que el estado natural es el reposo. Esto parece ser razonable, cuando dejamos de empujar un cuerpo, este pronto alcanza el reposo. Parece ser necesaria una acción exterior o fuerza aplicada al cuerpo para mantener el movimiento. Sin embargo, observemos esta situación con mayor detenimiento. La figura siguiente muestra un bloque de madera sobre un plano.



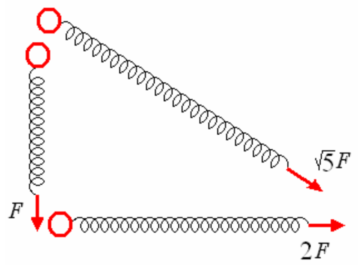
Aplicamos una fuerza pequeña al bloque, no pasa nada. Incrementamos la fuerza y a un valor particular el bloque se mueve. Si seguimos incrementando la fuerza empujando o jalando más, el objeto se mueve con mayor rapidez, Cuando dejamos de empujar el cuerpo rápidamente vuelve al reposo. Sin embargo si ponemos ruedas al bloque el resultado es diferente, una fuerza muy pequeña causa el movimiento. La diferencia son las ruedas debido a la fricción.
Para hacer un estudio libre de la fricción busquemos llegar cercanamente a esta condición, una forma de lograr esto es con una mesa neumática, se sopla aire sopla hacia arriba a través de pequeños agujeros manteniendo un disco suspendido sobre un colchón de aire. ¿Qué pasa cuando empujamos un objeto en ausencia de fricción? Este se mantiene en movimiento a velocidad constante.



En ausencia de una fuerza resultante, el objeto se mantiene en movimiento con velocidad uniforme o permanece en reposo. Esta es la **PRIMERA LEY DE NEWTON DEL MOVIMIENTO**
Ahora podemos pensar acerca de la situación cuando un objeto era empujado sobre un plano. Cuando la fuerza era pequeña no había movimiento, pero una fuerza debería causar movimiento; la conclusión es que debe haber otra fuerza actuando sobre el cuerpo la cual anula justamente el efecto de la fuerza que aplicamos. Al incrementar nuestra fuerza, la fuerza opuesta también se incrementa, hasta que en algún valor particular la fuerza opuesta termina de incrementarse y comienza el movimiento porque hay una fuerza resultante actuando sobre el objeto. La fuerza opuesta es la fuerza de Fricción

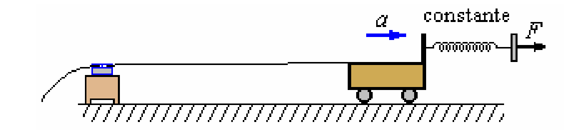
¿QUÉ ES FUERZA? En la vida cotidiana se considera fuerza a una sensación común asociada con la dificultad para mover o levantar un cuerpo. En Física se identifica una fuerza por el efecto que produce. Uno de los efectos de una fuerza es cambiar el estado de reposo o de movimiento del cuerpo, más concretamente, una fuerza cambia la velocidad de un objeto, es decir produce una aceleración. Cuando se aplica una fuerza sobre un cuerpo y no se produce movimiento, entonces puede cambiar su forma, aún si el cuerpo es muy rígido. La deformación puede o no ser permanente. Entonces los efectos de la fuerza neta son dos: cambiar el estado de movimiento de un cuerpo o producir una deformación, o ambas cosas.
Normalmente sobre un cuerpo pueden actuar varias fuerzas, entonces el cuerpo acelerará cuando el efecto de la fuerza neta que actúa sobre él no es cero.
Se llama **fuerza neta** o fuerza resultante a la suma de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo. Si la fuerza neta es cero, la aceleración es cero, el movimiento es con velocidad igual a cero (cuerpo detenido) o con velocidad constante. Cuando un cuerpo está en reposo o se mueve con velocidad constante, se dice que está en **equilibrio.**
Se pueden distinguir dos grandes clases de fuerzas: fuerzas de contacto, representan el resultado del contacto físico entre el cuerpo y sus alrededores, por ejemplo mover un carro o estirar un resorte; y fuerzas de acción a distancia que actúan a través del espacio sin que haya contacto físico entre el cuerpo y sus alrededores, por ejemplo la fuerza con que la Tierra atrae a los cuerpos que caen en caída libre. Todas las diferentes formas de fuerzas se encuentran dentro de esas dos grandes clasificaciones.

Para describir el mundo, la física contemporánea recurre a cuatro interacciones o fuerzas fundamentales, que actúan sobre las partículas de materia (y sobre las antipartículas), son vehiculadas por unas partículas llamadas vectores de interacción, que son: fotón (interacción electromagnética), bosón (interacción débil), gluón (interacción fuerte) y gravitón (interacción gravitacional).
1) Fuerzas electromagnéticas de atracción o repulsión entre partículas cargadas en reposo o en movimiento, explica la cohesión de los átomos, es mucho más intensa que la fuerza gravitacional.
2) Fuerzas nucleares intensas entre partículas subatómicas, responsable de la existencia del núcleo atómico asegura la cohesión interna de los constituyentes del núcleo atómico, protones y neutrones, y es responsable de un gran número de reacciones y de desintegraciones; es la de mayor magnitud (10^2 - 10^3 veces la fuerza electromagnética).
3) Fuerzas nucleares débiles de corto alcance, rige algunos procesos radiactivos, establece la estabilidad de algunos núcleos, es varios órdenes de magnitud (10^{12}) menor que la fuerza electromagnética.
4) Fuerza de atracción gravitacional entre cuerpos debido a sus masas, entre otras cosas hace que caigan las manzanas y que suba la marea, es la fuerza de menor magnitud comparada con las otras.
Para que el concepto de fuerza sea exacto se debe establecer un método para medirla. Una fuerza se puede medir por el efecto que produce. Por ejemplo se puede usar la deformación que una fuerza produce en un resorte, como en la figura. Si se aplica una fuerza verticalmente a un resorte y se estira una unidad, le asignamos a la fuerza una magnitud unitaria F. Se aplica ahora otra fuerza al mismo resorte horizontalmente, produciéndole un estiramiento de dos unidades, la magnitud de la fuerza será de $2F$. Si se aplican simultáneamente las dos fuerzas, el resorte se inclina, y se estira $\sqrt{5}$ veces. La fuerza equivalente que produce ese estiramiento del resorte es la suma vectorial de F y $2F$. Es decir, la fuerza es un vector.

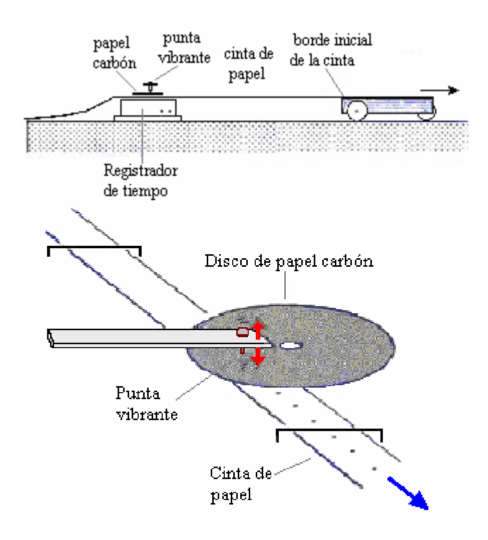


El instrumento para medir fuerzas se llama ***dinamómetro***, es un resorte que se estira sobre una escala. Si se aplica una fuerza de una unidad sobre el dinamómetro, el resorte se estira hasta que ejerce una fuerza igual y contraria a la aplicada. En la escala se mide el alargamiento del resorte y se le asigna una unidad de fuerza. De esa manera se calibra el dinamómetro y se usa para medir fuerzas, por ejemplo se aplica una fuerza sobre el dinamómetro y si se estira 2,5 unidades, entonces la fuerza aplicada es 2,5 veces la unidad de fuerza.
Este procedimiento es válido para pequeños alargamientos del resorte, ya que si la fuerza es muy intensa, se puede deformar y no volver a su forma original.

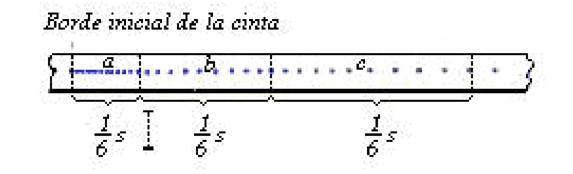
CAMBIO DE VELOCIDAD
Nuestro siguiente problema es encontrar una relación entre la fuerza y el cambio en el movimiento producido por ésta.
Para esto necesitamos lo siguiente:
1. Un carro muy ligero que pueda moverse sin fricción sobre una superficie horizontal.
2. Una fuerza constante. Esta podernos obtenerla mediante un resorte (Si mantenemos un resorte estirado una misma longitud, la fuerza que la estira es constante).



3. Un registrador de tiempo. El movimiento del carro puede estudiarse si una cinta de papel atada a éste pasa a través del registrador que produce marcas en la cinta a intervalos de tiempo regulares.

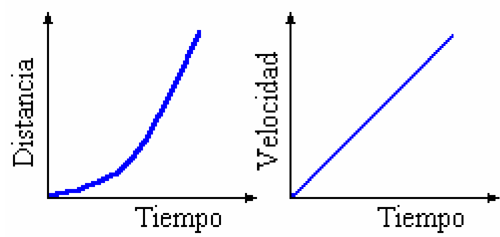


La figura siguiente muestra la cinta de papel producida por una fuerza constante.

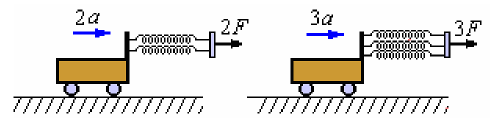


Con los datos obtenidos en esta experiencia se realiza el gráfico distancia - tiempo y se obtiene una curva. Con los datos también se puede obtener la velocidad media en cada intervalo de tiempo. El gráfico velocidad - tiempo es una línea recta que indica que

el movimiento es con aceleración constante. De aquí podemos concluir que una fuerza constante produce una aceleración constante.



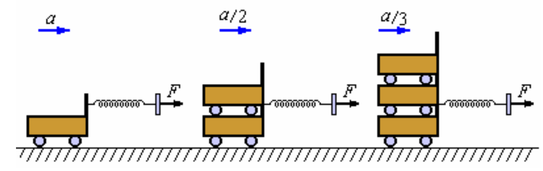
Si duplicamos la fuerza usando dos resortes iguales estirados la misma longitud, como se muestra en la figura.



Duplica la fuerza y produce el doble de aceleración.
Si triplicamos la fuerza se obtiene una aceleración de valor triple.
Concluimos que la aceleración a del cuerpo es directamente proporcional a la fuerza.

$a \propto F$

Podemos escribir esto como $F = ma$, donde m es la constante de proporcionalidad. A esta constante la llamaremos **MASA**.
Para una determinada fuerza a mayor constante m la aceleración es menor. A mayor valor de la constante es más difícil acelerar el cuerpo.
Para conocer qué factores cambian esta constante realicemos el siguiente experimento: en lugar de usar un solo carro jalado por el resorte estirado usemos dos carros uno sobre otro y luego tres carros como se muestra en la figura



La aceleración que se obtiene con los carros es igual a la mitad y con tres es igual a un tercio. Como el valor de F es igual en todos los casos, quiere decir que la constante con dos carros es igual a $2m$ y con tres carros es $3m$.
Como la aceleración es una cantidad vectorial la fuerza también lo es y tiene la misma dirección que la aceleración, pero un módulo m veces mayor, de modo que la relación anterior puede escribirse en la forma

$\vec{F} = m\vec{a}$

Fuerza = masa x aceleración.
Esta expresión constituye la **SEGUNDA LEY DE NEWTON DEL MOVIMIENTO**.
La fuerza que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración que le imprime.

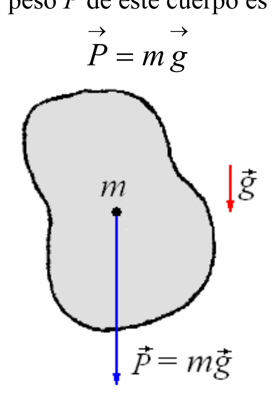
UNIDADES DE FUERZA Y MASA
La relación $F = ma$ nos da una relación entre fuerza, masa y aceleración. En el sistema internacional (S.I.) la unidad de aceleración es m/s. ¿Cuales son las unidades de fuerza y de masa? Como son dos cantidades que se relacionan sólo tenernos que especificar un estándar para una de ellas.
El sistema internacional adopta corno unidad una pieza de material llamado KILOGRAMO, cuyo símbolo es kg. El kilogramo es la masa un prototipo de platino iridiado sancionado por la Conferencia General de Pesas y Medidas realizada en París en 1889 y depositado en el pabellón de Breleuil en Sevres.
La unidad de fuerza es el newton, cuyo símbolo es N y se define así:
El newton la fuerza que produce una aceleración de un metro por segundo al cuadrado a una masa de un kilogramo.

$$N = \frac{kgm}{s^2}$$

Otros sistemas:
MKS: igual al S.I.
CGS: Masa $\rightarrow$ gramo (g), $1\ g = 10^{-3}$ kg
Aceleración $\rightarrow$ cm/s^2
Fuerza $\rightarrow$ dina = $g.cm/s^2$
Inglés técnico: En este sistema la unidad fundamental es la unidad de fuerza.
Fuerza $\rightarrow$ libra (lb), 1 lb = 4,45 N
Aceleración $\rightarrow$ pie/s^2
Masa $\rightarrow$ slug = lb58
s^2/pie

PESO DE UN CUERPO. El peso de un cuerpo es la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre el cuerpo. Un cuerpo de masa m sometido a cierta fuerza cae con la aceleración de la gravedad g, el peso P de este cuerpo es

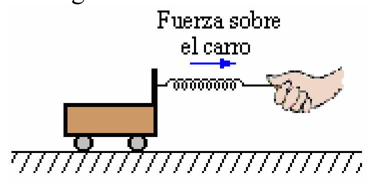
$$\vec{P} = m\vec{g}$$



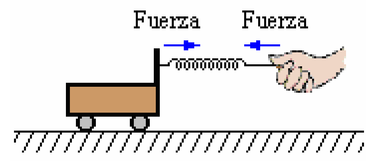
Su dirección es hacia abajo (hacia el centro de la Tierra). Como el peso es una fuerza debe medirse en Newtons.
Debido a que la aceleración de la gravedad varía de un lugar a otro de la Tierra, el peso de un cuerpo es diferente en lugares distintos, sin embargo la masa de un cuerpo es la cantidad fija que no depende del lugar donde está situado el cuerpo,
Aunque el peso de un objeto varía de un sitio a otro, esta variación es demasiado pequeña para ser observada en la mayor parte de las aplicaciones prácticas, por esto, el peso de un cuerpo parece ser una característica constante al igual que su masa. Este

hecho ha conducido al empleo ordinario de otras dos medidas:
KILOGRAMO FUERZA, es el peso de un Kilogramo masa.
1 kgf = 9,8 N
LIBRA MASA, es la masa de un cuerpo que pesa una libra.
1 libra masa = 0,454 kg.
Estas unidades son prácticas pero incorrectas y no deben ser usadas en Física.

ACCION Y REACCION.
Hagamos una observación más detallada cuando jalamos el carro con un resorte estirado una determinada longitud.



Para que el resorte esté estirado es necesario jalarlo por los dos lados. Se necesitan fuerzas en sentidos opuestas y en cada extremo del resorte.
Cuando jalamos el carro, una fuerza actúa sobre el carro y una fuerza en sentido opuesto actúa sobre nuestra mano. ¿Cuáles son las magnitudes de estas fuerzas?



Con el objeto de dar respuesta a esta pregunta pongamos dos resortes iguales al primero y jalemos de tal manera que el carro adquiera la misma aceleración que antes, esto quiere decir, por la segunda ley de newton que siendo la misma masa *m* estamos aplicando la misma fuerza ($F = ma$) que antes y observamos que los resortes estiran la misma longitud, lo que quiere decir que la fuerza sobre la mano es igual a la fuerza sobre el carro.



Esto constituye la **TERCERA LEY DE NEWTON DEL MOVIMIENTO.**
Si un cuerpo ejerce una fuerza sobre un segundo, éste ejerce una fuerza igual y opuesta sobre el primero. La fuerza ejercida por el primer cuerpo sobre el segundo es la ACCIÓN, la fuerza igual y opuesta actuando sobre el primero es la REACCIÓN,
Expresado en símbolos, es:

$$\vec{F}_{\text{sobre 2 debido a 1}} = \vec{F}_{\text{sobre 1 debido a 2}}$$

Fuerza de contacto de un cuerpo a otro con un cambio de dirección o sin él
A continuación presentarnos algunos casos tipo de la aplicación de las leyes de Newton.

APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON
Cuando estudiamos Cinemática, encontrarnos las relaciones entre desplazamiento, aceleración y tiempo. Por ejemplo, conociendo la aceleración $\vec{a}$ las condiciones tales como posición inicial, velocidad inicial, es decir la posición y la velocidad en el tiempo que llamamos inicial ($t = 0$), podemos conocer la velocidad y posición para cualquier tiempo. Las condiciones iniciales las tenemos pero la aceleración, ¿de dónde? Para esto tenemos $\vec{F} = m\vec{a}$, todo lo que tenemos que hacer es conocer las fuerzas sobre el cuerpo y su masa, y entonces podremos encontrar $\vec{a}$.
La mejor forma de estar seguros que comprendemos el significado de $\vec{F} = m\vec{a}$, es hacerlo con algunos problemas que involucran las leyes de Newton. Para resolver un problema sugerimos cuatro pasos a seguir:
1. Dibujar un esquema del sistema
2. Identificar el cuerpo a cuyo movimiento se refiere el problema.
3. Dibujar otra figura con solamente el objeto en particular manteniendo el marco de referencia poner todas las fuerzas que actúan sobre el objeto mediante flechas. Esto se conoce como **DIAGRAMA DEL CUERPO LIBRE (DCL)**. Si se comete una equivocación todo lo demás fallará, por eso es conveniente hacerlo bien. Una mejor forma de comenzar es poner la fuerza de gravedad primero y luego preguntarse:
"¿Qué toca al cuerpo?", la acción de tos resortes, cuerdas, manos y otros objetos, todos deben ser considerados. Así como también las fuerzas que actúan sin tocar el cuerpo, como la fuerza eléctrica, magnética de las cuales no nos preocupamos en este curso.
4. Finalmente, aplicar la segunda ley de Newton a cada componente de fuerza y aceleración.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\sum F_x = ma_x,\ \sum F_y = ma_y,\ \sum F_z = ma_z.$$

y ahora resolver para la aceleración.
En algunos de los problemas que se presentan más frecuentemente, las acciones se producen por fuerzas sin contacto; en otros se usan cuerdas y varillas como medios de conexión. Cuando las masas de estos medios de conexión son despreciables su único efecto es el de transmitir

ESTÁTICA DE LAS MASAS PUNTUALES.
Los sistemas en los cuales todas sus partes satisfacen la primera ley son llamados sistemas estáticos, es decir si la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan es nula, el cuerpo esta en equilibrio y permanece en reposo, o si está en movimiento, se mantiene con velocidad constante

La condición de este equilibrio es

$$\sum \vec{F} = 0$$

y en componentes cartesianas:

$$\sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0,\ \sum F_z = 0.$$

Las fuerzas son ejercidas sobre el objeto o sistemas por. Medios exteriores al sistema.

Ejemplo 1. La Fuerza gravitacional Dado que la aceleración de un cuerpo en caída libre en la tierra es *g*, ¿cuál es la fuerza de la gravedad?

Solución.

Como este movimiento es en una sola dimensión, consideramos que este se realiza en el eje *z*, tal que

$$\vec{a} = -g\hat{k}$$

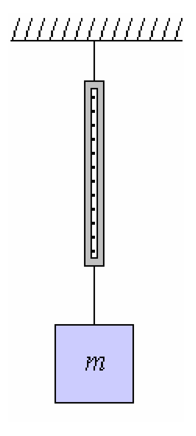
Según la Segunda Ley de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} = -mg\hat{k}$$

$$\sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0,\ \sum F_z = -mg.$$

Siendo esta la respuesta que ya conocíamos.

Ejemplo 2. El dinamómetro. El dinamómetro es un instrumento que se utiliza para medir las fuerzas. Consta de un resorte con una escala que indica su estiramiento, la cual está graduada en Newtons. Cuando lo utilizamos para pesar se dispone como lo muestra la figura.



Se suspende la masa *m*, el resorte del dinamómetro se estira hasta que alcanza el equilibrio estático.

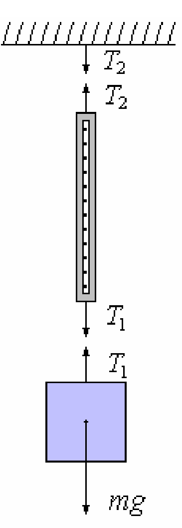


Diagrama del cuerpo libre (DCL)

Aplicando la condición de equilibrio de la masa *m*

$$T_1 - mg = 0$$

Luego $\Rightarrow T_1 = mg$

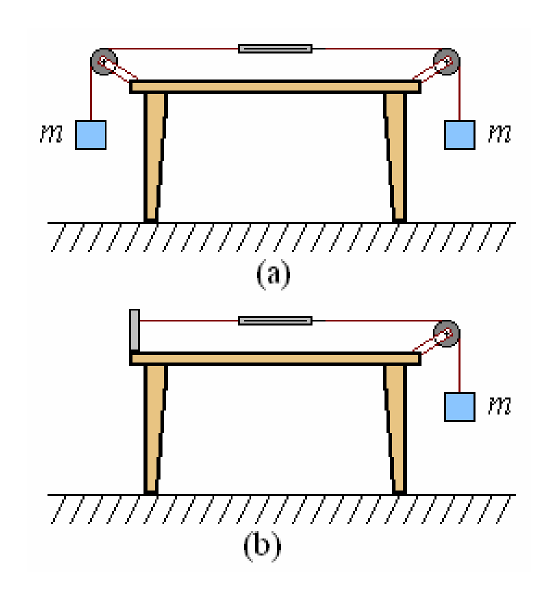
Si despreciamos la masa del dinamómetro, tenemos que:

$T_1 - T_2 = 0$ y $T_1 = T_2$

El dinamómetro indica en la escala la fuerza

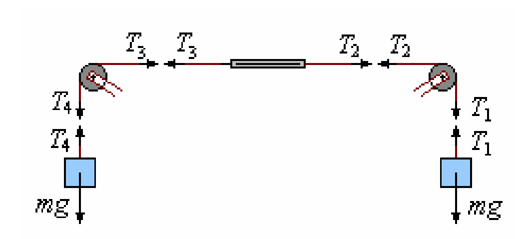
$$T_2 = mg$$

Ejemplo 3. Se tiene los dispositivos mostrados en la figura. ¿Cuánto indica el dinamómetro de la figura (a) y cuánto el dinamómetro de la figura (b)?



Solución.

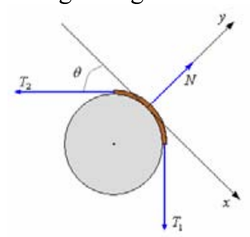
a) El diagrama de cuerpo libre de la figura (a) es



Empezando por la derecha

$T_1 - mg = 0 \Rightarrow T_1 = mg$

La figura siguiente muestra la polea



Para que el trozo de cuerda este en equilibrio

$\sum \vec{F} = 0$

Descomponiendo las fuerzas sobre el trozo de cuerda en los ejes *x* e *y*.

Como la cuerda se considera sin masa la suma de fuerzas a lo largo del eje *x* es

$T_1 \cos\theta - T_2 \cos\theta = 0 \Rightarrow T_1 = T_2$

En el dinamómetro, considerándolo de masa despreciable.

$\sum \vec{F} = 0$

$T_2 - T_3 = 0 \Rightarrow T_2 = T_3$

En la polea de la izquierda

$T_4 = T_3$

En la masa de La izquierda

$\sum \vec{F} = 0$

$T_4 - mg = 0 \Rightarrow T_4 = mg$

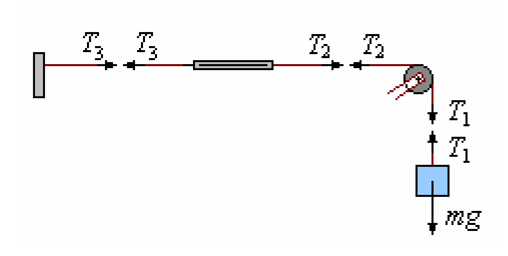
Como conclusión todas las tensiones son iguales a mg

$T_4 = T_3 = T_2 = T_1 = mg$

El dinamómetro es tensionado por la fuerza T_1, y su indicación será:

$T_1 = mg$

b) El diagrama de cuerpo libre de la figura siguiente es



En la masa

$T_1 - mg = 0 \Rightarrow T_1 = mg$

En la polea

$T_1 = T_2$

En el dinamómetro

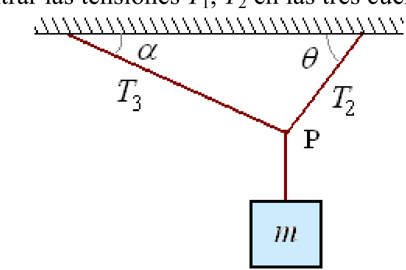
$T_3 = T_2 = T_1 = mg$

El dinamómetro es tensionado por la fuerza T_1 y su indicación será

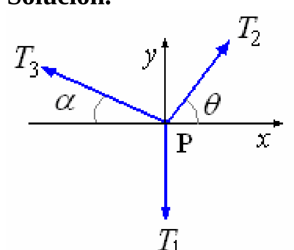
$T_1 = mg$

Como se puede ver esta situación es completamente análoga a la anterior, sólo que hemos sustituido una de las poleas por la pared.

Ejemplo 4. Un cuerpo de masa *m* se sostiene por medio de cuerdas como se muestra en la figura. Encontrar las tensiones T_1, T_2 en las tres cuerdas.



Solución.



Tomando un sistema de ejes horizontal y vertical como el mostrado en la figura tenemos:

$\vec{T}_1 = -mg\hat{j}$

$\vec{T}_2 = T_2 \cos\theta\, \hat{i} + T_2 \text{sen}\theta\, \hat{j}$

$\vec{T}_3 = -T_3 \cos\alpha\, \hat{i} + T_3 \text{sen}\alpha\, \hat{j}$

Con $\sum \vec{F} = 0$

$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0$

Obtenemos:

$\sum F_x = T_2 \cos\theta - T_3 \cos\alpha = 0$

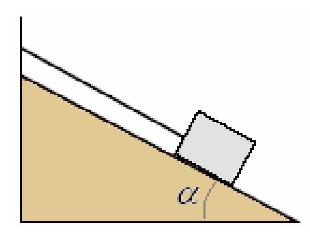
$\sum F_y = T_2 \text{sen}\theta + T_3 \text{sen}\alpha - mg = 0$

Resolviendo estas dos ecuaciones

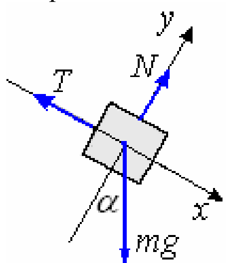
$T_2 = \dfrac{mg\cos\alpha}{\text{sen}(\theta+\alpha)}$, $T_3 = \dfrac{mg\cos\theta}{\text{sen}(\theta+\alpha)}$

Ejemplo 5. Un bloque de 50N de peso se ubica sobre un plano inclinado en un ángulo α de 30º con la

horizontal. El bloque se sujeta con una cuerda ideal que se encuentra fija en la parte superior del plano inclinado, como en la figura. Estudiar el comportamiento mecánico del bloque.



Solución.
El D. C. L. del cuerpo:



Fuerza de atracción de la Tierra, que es su peso *mg*.
Fuerza de la cuerda que lo sostiene, que es la tensión *T*
Fuerza que el plano ejerce sobre el cuerpo, que es la normal *N*
Como el sistema está en equilibrio, se aplica la primera Ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0$$

Del diagrama de cuerpo libre se obtiene:

$$\sum F_x : -T + mg\text{sen}\alpha = 0$$

$$\sum F_y : N - mg\cos\alpha = 0$$

Despejando *T* y *N*, y reemplazando los valores numéricos, se obtiene:

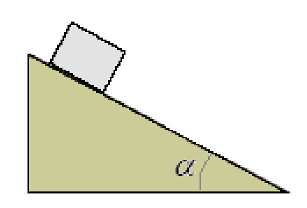
$$T = mg\text{sen}\alpha = 50\text{sen}30° = 25 \text{ N}$$

$$N = mg\cos\alpha = 50\cos30° = 43{,}2 \text{ N}$$

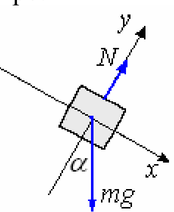
DINÁMICA CON FRICCIÓN DESPRECIABLE.

Los sistemas en los cuales todas sus partes satisfacen la primera ley son llamados sistemas estáticos, es decir si la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan no es nula y la fricción se considera despreciable,

Ejemplo 6. Si un bloque de masa m se ubica sobre un plano sin roce, inclinado un ángulo α con la horizontal, resbalará una distancia D a lo largo del plano. Describir su movimiento.



Solución.
El D. C. L. del cuerpo:



Del diagrama de cuerpo libre se obtiene:

$$\sum F_x : mg\text{sen}\alpha = ma_x$$

$$\sum F_y : N - mg\cos\alpha = ma_y = 0$$

De estas ecuaciones se obtiene:

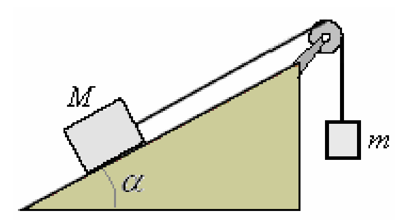
$$a_x = g\text{sen}\alpha \text{ y } N = mg\cos\alpha$$

Se concluye que la aceleración del bloque en dirección del plano inclinado es la componente de *g* en esa dirección. Estudiando ahora el movimiento del bloque, considerando que parte del reposo y se desliza una distancia *D*, se puede calcular la rapidez con que llega a la base del plano. Si se considera que el movimiento del bloque comienza desde el reposo, se puede usar:

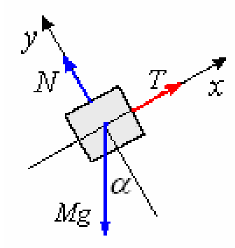
$$v^2 = v_0^2 + 2a_x\Delta x \Rightarrow v^2 = 2(g\text{sen}\alpha)D$$

$$\text{y} \quad v = \sqrt{2gD\text{sen}\alpha}$$

Ejemplo 7. Para el siguiente sistema mecánico, calcular la aceleración de las masas y la tensión de la cuerda.



Solución.
Como no se conoce la dirección del movimiento, supongamos que el cuerpo de masa *M* sube por el plano inclinado, lo que determina el sentido de la aceleración, entonces aplicando la segunda Ley de Newton se aplica cada masa:
El D. C. L. del cuerpo *M*:



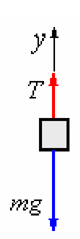
Del diagrama de cuerpo libre se obtiene:

$$\sum F_x : T - Mg\text{sen}\alpha = Ma \Rightarrow$$

$$T = Mg\text{sen}\alpha + Ma$$

$$\sum F_y : N - Mg\cos\alpha = 0$$

De estas ecuaciones se obtiene:
El D. C. L. del cuerpo *m*:



Del diagrama de cuerpo libre se obtiene:

$\sum F_y : T - mg = -ma \Rightarrow T = mg - ma$

De estas ecuaciones se obtiene

$Mg\text{sen}\alpha + Ma = mg - ma$

$a = \dfrac{(m - M\text{sen}\alpha)}{(m+M)} g$

Se observa que el signo de a depende del término (m - M sen α).

Ahora se calcula el valor de la tensión reemplazando el valor de a en T:

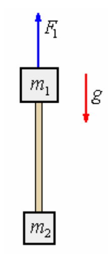
$T = mg - m\left(\dfrac{m - M\text{sen}\alpha}{m+M}\right)g$

$T = \dfrac{mM}{(m+M)}(1 + \text{sen}\alpha)g$

Ejemplo 8. Dos bloques de masas m_1 = 20 kg y m_2 = 8 kg, están unidos mediante una cuerda homogénea inextensible que pesa 2 kg. Se aplica al conjunto una fuerza vertical hacia arriba de 560 N. Calcular:

a) La aceleración del conjunto;

b) Las fuerzas que actúan en los extremos de la cuerda.



Solución.

En el D. C. L. de m_1:

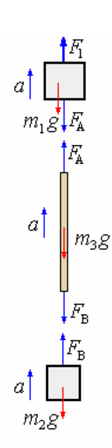
$F_1 - F_A - m_1 g = m_1 a \quad (1)$

En el D. C. L. de la cuerda de masa m_3:

$F_A - F_B - m_3 g = m_3 a \quad (2)$

En el D. C. L. de m_2:

$F_B - m_2 g = m_2 a \quad (3)$



a) Sumando (1), (2) y (3):

$F_1 - (m_1 + m_2 + m_3)g = (m_1 + m_2 + m_3)a$

y $a = \dfrac{F_1}{(m_1 + m_2 + m_3)} - g$

$a = \dfrac{560}{(20 + 8 + 2)} - 9{,}8$ = 8,87 m/s²

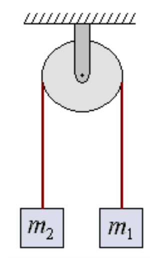
b) De (3) $F_B = m_2(g + a)$

$F_B = 8(9{,}8 + 8{,}87)$ = 149,4 N

De (1) $F_A = F_1 - m_1(g + a)$

$F_A = 560 - 20(9{,}8 + 8{,}87)$ = 186,6 N

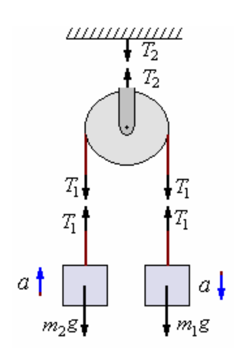
Ejemplo 9. La máquina de ATWOOD. Es un aparato que se utiliza para determinar con exactitud la gravedad y consiste de dos masas m_1 y m_2, ($m_1 > m_2$), que están unidas mediante una cuerda que pasa sobre una polea. Considerar la cuerda inextensible y sin masa. Asimismo, no tornar en cuenta la fricción y la masa de la polea. Describir el movimiento y calcular la tensión en la cuerda.



Solución.

Siendo m_1 mayor que m_2, la masa m_1 se moverá hacia abajo con una aceleración a y la masa m_2 se moverá hacia arriba con la misma aceleración a.

La figura siguiente muestra los diagramas de cuerpo libre de cada una de las partes del sistema.



La polea cumple la función de cambiar la dirección T_1 Considerando el sentido de la aceleración o como positiva.

Aplicando la Segunda Ley de Newton a la masa m_1

$$m_1 g - T_1 = m_1 a$$

Aplicando la Segunda Ley de Newton para la masa m_2:

$$T_1 - m_2 g = m_2 a$$

De estas dos ecuaciones obtenemos:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g \text{ y } T_1 = \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} g$$

Si las masas m_1 y m_2 fueran casi iguales, el valor de la aceleración sería pequeña y podría determinarse midiendo el tiempo en que una de las masas sube o baja una distancia determinada.

La razón $\frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}$ se determina pesando los cuerpos.

Finalmente, la magnitud de g se obtiene a partir de estas cantidades mediante la ecuación

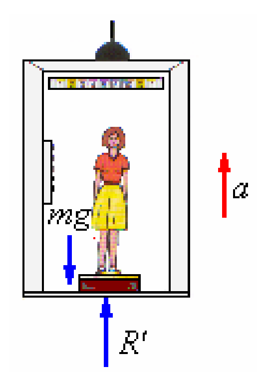
$$g = \frac{(m_1 + m_2)}{(m_1 - m_2)} a$$

Ejemplo 10. El peso de un pasajero en ascensor. Consideremos un pasajero de peso *mg* en un ascensor este peso es equilibrado por la reacción que el piso ejerce sobre él, si el ascensor estuviera parado $R = mg$.

Si el ascensor sube con aceleración *a*. ¿Cuál es el peso de la persona?

Solución.

La figura muestra el ascensor subiendo con una aceleración a



Ahora la reacción del piso es R'.

Aplicando la Segunda Ley de Newton al movimiento de la persona

$$R' - mg = ma \Rightarrow R' = m(g + a)$$

Si el ascensor sube el pasajero se siente más pesado, como si fuera empujado contra el piso. Si el ascensor desciende con esta aceleración,

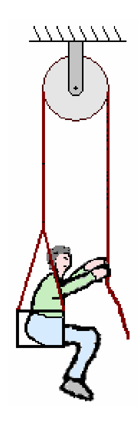
$R' - mg = -ma \Rightarrow R' = m(g - a)$, el pasajero se siente más liviano.

Ejemplo 11. La figura muestra a un hombre elevándose mediante una fuerza vertical que aplica él mismo a la cuerda que tiene en las manos. Si el hombre y la silla juntos tienen una masa de 100 kg.

Se pregunta:

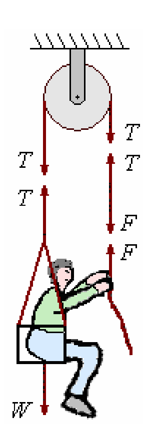
a) ¿Con qué fuerza debe jalar para, subir con una velocidad constante?

b) ¿Con qué fuerza debe jalar para subir con una aceleración de 1 m/s^2 (considerar g = 10 m/s^2?



Solución.

a) La figura siguiente muestra los diagramas de cuerpo libre de cada una de las partes del sistema.



Como se considera la cuerda con masa despreciable en el D.C.L. del trozo de cuerda

$$T = F$$

La polea solo cambia la dirección de la tensión T.

En el D.C.L .del hombre-silla

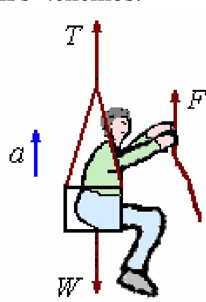
$$T + F - W = 0 \Rightarrow 2F = W$$

y $F = \frac{W}{2}$

Como $W = 100 \times 10 = 1000$ N

$$F = \frac{1000}{2} = 500 \text{ N}$$

b) Ahora como el hombre debe subir con una aceleración de 1 m/s^2 tenemos:



$$T + F - W = \frac{W}{g}a \Rightarrow 2F = W + \frac{W}{g}a$$

y $F = \frac{W}{2}\left(1 + \frac{a}{g}\right)$

Como $W = 1000$ N, $a = 1$ m/s^2 y $= 1$ m/s^2

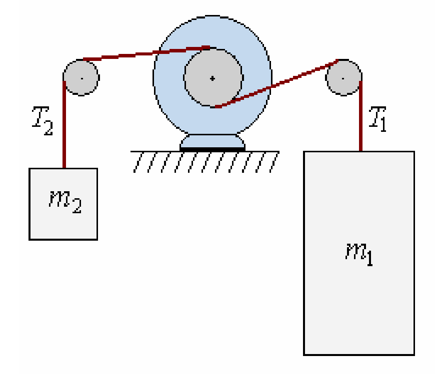
$$F = \frac{1000}{2}\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 550 \text{ N}$$

Ejemplo 12. La figura muestra un ascensor. Este consiste de la caja con masa $m_1 = 1100$ kg, el contrapeso con masa $m_2 = 1000$ kg. El cable y poleas con masa y fricción despreciables.
Cuando el ascensor tiene una aceleración hacia arriba de 2 m/s^2, el contrapeso tiene igual aceleración pero hacia abajo.

a) ¿Cuál es el valor de la tensión T_1?

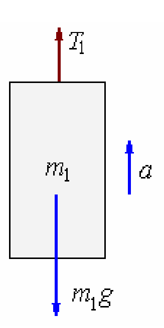
b) ¿Cuál es el valor de la tensión T_2?

c) ¿Cuál es la fuerza ejercida por el motor sobre el cable?



Solución.

a) Consideremos el D.C.L de la masa m_1:



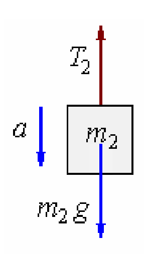
Aplicando la Segunda Ley de Newton

$$T_1 - m_1 g = m_1 a \Rightarrow T_1 = m_1(a + g)$$

$$T_1 = 1100(2 + 9{,}8)$$

$$= 12980 \text{ N}$$

b) Consideremos el D.C.L. de la masa m_2:



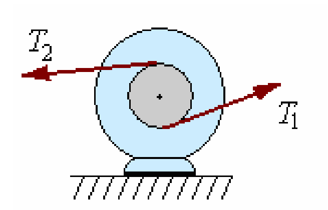
Aplicando La Segunda Ley de Newton

$$m_1 g - T_2 = m_2 a \Rightarrow T_2 = m_2(g - a)$$

$$T_2 = 1000(9{,}8 - 2)$$

$$= 7800 \text{ N}$$

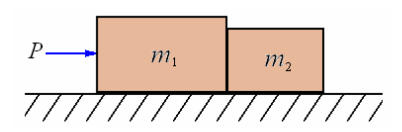
c) En el motor Fuerza ejercida por el motor (T_1 y T_2 pueden considerarse colineales)



$$F_M = T_1 - T_2 = 12980 - 7800$$

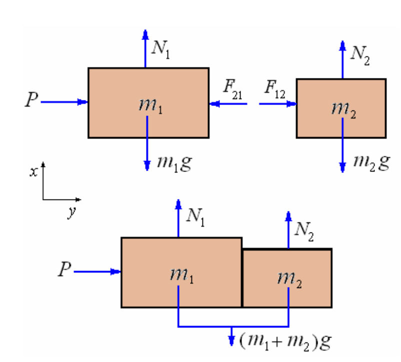
$$= 5180 \text{ N}$$

Ejemplo 13. Demostración de la tercera ley de Newton mediante el uso de la segunda ley.
Se tienen dos cuerpos de masas m_1 y m_2 los cuales son empujados sobre un plano sin fricción por una fuerza de magnitud P. Demostrar que aquí se cumple la tercera ley de Newton.



Solución.

Asumiremos que no hay fricción entre las superficies de contacto de m_1 y m_2.
La figura muestra los D.C.L. para los bloques 1, 2 y para el sistema.



N_1 y N_2 son las fuerzas ejercidas por el plano.
F_{21} es la fuerza que el bloque 2 ejerce sobre el bloque 1.
F_{12} es la fuerza que el bloque 1 ejerce sobre el bloque 2.
La fuerza P solo actúa sobre el bloque 1, ya que solo está en contacto con él.
Como asumimos que no hay fricción entre los bloques, las fuerzas son normales a la superficie de contacto.
Para el bloque 1 tenemos:

$P - F_{21} = m_1 a_{1x}$ y $N_1 - m_1 g = 0$

Similarmente para el bloque 2

$F_{12} = m_2 a_{2x}$ y $N_2 - m_2 g = 0$

Para el sistema

$P = (m_1 + m_2) a_x$ y

$N_1 + N_2 - (m_1 + m_2) g = 0$

En este caso no nos interesan las ecuaciones en *y* pero si las ecuaciones en *x*.
Como los bloques se mueven juntos:

$a_{1x} = a_{2x} = a_x$

Sumamos la ecuación para el bloque 1 con la ecuación para el bloque 2.

$P - F_{21} + F_{12} = m_1 a_{1x} + m_2 a_{2x} = (m_1 + m_2) a_x$

Comparando con la ecuación para el sistema tenemos:

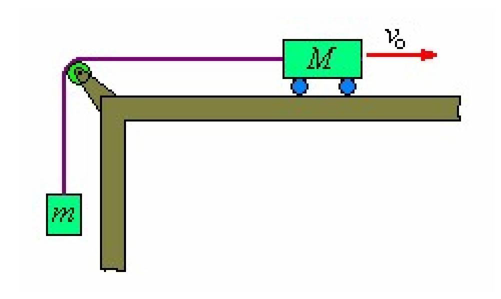
$P - F_{21} + F_{12} = P$

Esto dice que la magnitud de la fuerza de 1 sobre 2 es igual a la fuerza de2 sobre 1. Como ellas son opuestas resulta ser precisamente la tercera ley de Newton.

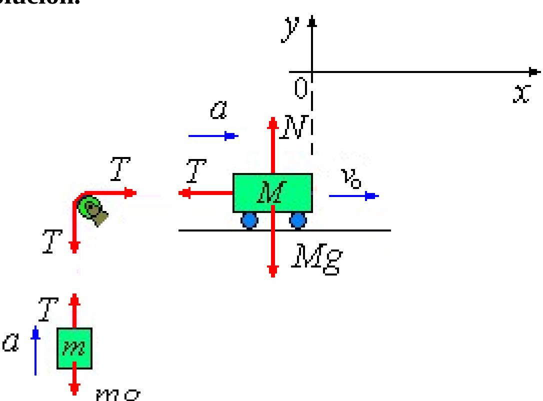
$F_{21} = F_{12}$, Acción y reacción.

Ejemplo 14.. Un carrito de masa M = 500 gramos está unido a una carga de masa m = 200 gramos mediante una cuerda. En el momento inicial el carrito tenia la velocidad inicial v_0 = 7 m/s y se movía a la derecha por un plano horizontal. Determinar para t = 5 s:

a) el valor y sentido de la velocidad del carrito,
b) el lugar, donde encontrará
c) el desplazamiento del carrito
d) el recorrido total del carrito.
(Usar g = 9,8 m/s^2)



Solución.



Para la masa *M*:

$-T = Ma$ (1)

Para la masa *m*:

$T - mg = ma$ (2)

Sumando (1) y (2)

$-mg = (M + m)a \Rightarrow$

$$a = -\frac{m}{(M+m)} g = -\frac{0,2}{0,7}(9,8) = -2,8 \text{ m/s}^2$$

La aceleración es en sentido contrario al indicado en la figura.
a) La velocidad inicial del carrito es v_0 = 7 m/s y su aceleración es a = - 2,8m/s^2.
De las ecuaciones de cinemática

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad v = v_0 + at,$$

Hallamos:

$x = 7t - 1,4t^2$, $v = 7 - 2,8t$

Dentro de 5 s el carrito tendrá una velocidad v = - 7 m/s (dirigida a la izquierda).

b) $x = 7(5) - 1,4(5)^2 = 35 - 35 = 0$

El carrito se encontrará en la posición inicial.
c) El desplazamiento es cero.

d) El carrito se detiene cuando v = 0 e inicia el camino de vuelta.

$0 = 7 - 2,8t \Rightarrow t = \frac{7}{2,8} = 2,5$ s

Recorrido total $s = 2\left[7(2,5) - 1,4(2,5)^2\right]$
$= 17,5$ m

Recorrerá un trayecto igual a 17,5 m.

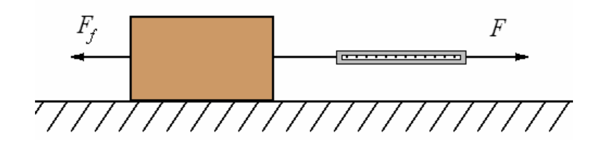
FRICCIÓN

Cuando un cuerpo sobre una superficie se empuja o se jala éste puede permanecer inmóvil, esto sucede porque la fuerza aplicada no ha sido suficiente para vencer la fuerza de fricción. Cuando logr################ que el cuerpo deslice sobre la superficie es necesario aplicar una fuerza para que éste continúe en movimiento.

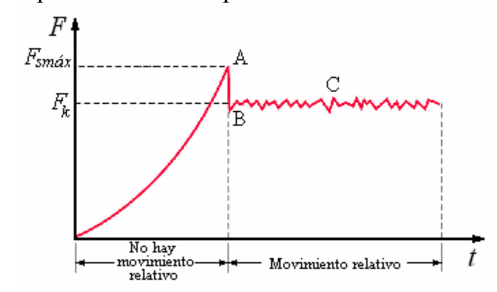
Comportamiento de un cuerpo que descansa sobre un plano horizontal

Supongamos que jalamos un bloque con un dinamómetro, como se muestra en la figura.

Comportamiento de un cuerpo que descansa sobre un plano horizontal



Dibujemos una gráfica de la fuerza F aplicada sobre el bloque versus el tiempo t.



1. Desde el origen hasta el punto A la fuerza F aplicada sobre el bloque no es suficientemente grande como para moverlo. Estamos en una situación de equilibrio estático

$$F = F_{fs} = \mu_s N$$

En el punto A, la fuerza de rozamiento F_{fs} alcanza su máximo valor $\mu_{smáx} N$

$$F = F_{fsmáx} = \mu_{smáx} N$$

2. Si la fuerza F aplicada se incrementa un poquito más, el bloque comienza a moverse. La fuerza de rozamiento disminuye rápidamente a un valor menor e igual a la fuerza de rozamiento dinámico,

$$F = F_{fk} = \mu_k N$$

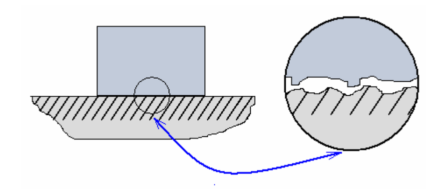
Si la fuerza F no cambia, punto B, y permanece igual a $F_{fsmáx}$, el bloque comienza moviéndose con una aceleración

$$a = \frac{(F - F_{fk})}{m}$$

Si incrementamos la fuerza F, punto C, la fuerza neta sobre el bloque $F - F_{fk}$ se incrementa y también se incrementa la aceleración.

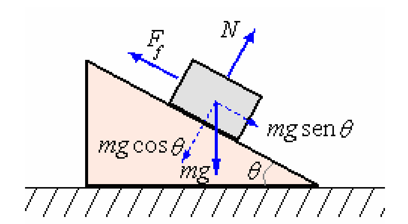
Observación. Encontramos que con fuerzas menores que 10 N no se produce movimiento.
Con 10 N el bloque comienza a moverse.
Para fuerzas mayores a 10 N el bloque se acelera.
Si medimos la aceleración podemos conocer la fuerza resultante sobre el bloque aplicando la segunda ley de Newton, $F = ma$.
Cuando el dinamómetro indica 12 N la fuerza resultante a partir de la aceleración medida es 4 N, esto significa que se necesita 12 N – 4 N = 8 N, para vencer la fuerza de fricción Si aplicamos 10 N al bloque para que inicie el movimiento, después de esto es posible reducir la fuerza a 8 N y aún mantener el bloque en movimiento.
En resumen:
Una fuerza de 10 N inicia el movimiento del bloque.
Una fuerza de 8 N mantiene el movimiento del bloque.

El origen de este fenómeno se debe a la existencia de fuerzas entre las moléculas del cuerpo y la superficie; si la superficie de contacto del cuerpo con la superficie fuera perfectamente plana, la fuerza de atracción podría ser considerable, como es el caso de dos placas de vidrio perfectamente limpias que una vez puestas en contacto, difícilmente pueden ser separadas.
Las superficies nunca son perfectamente lisas y las imperfecciones constituyen verdaderos obstáculos al desplazamiento como se muestra en la figura. Es preciso vencer estos obstáculos para iniciar el movimiento y también para mantenerlo.



A esta fuerza se le conoce como FUERZA DE FRICCION O ROZAMIENTO (F_f).

Con la finalidad de conocer la dependencia de esta fuerza de rozamiento realicemos la siguiente experiencia.
Supongamos un plano inclinado con un bloque de masa ni descansando sobre él.



Encontramos que el bloque empieza a resbalar para un determinado ángulo θ. Si colocamos dos bloques juntos, el ángulo con el cual inician el movimiento sigue siendo θ, lo mismo ocurre con tres bloques. La fuerza que jala al cuerpo es la componente del peso $mg\text{sen}\theta$, paralela al plano. La otra componente es perpendicular al plano $mg\cos\theta$. Esta es la fuerza que sostiene al bloque sobre la superficie (Fuerza Normal). Si duplicarnos el peso mg a $2mg$, duplicamos la fuerza que jale al bloque y la fuerza normal tal que:

$$\frac{\text{Fuerza que inicia el movimiento}}{\text{Fuerza normal}} = \text{Constante}$$

O

$$\frac{mg\ \text{sen}\,\theta}{mg\cos\theta} = \tan\theta = \mu_s = \text{Constante}$$

$$\frac{F_f}{N} = \mu_s$$

A esta constante μ_s se le llama coeficiente de fricción estática.

Si se toman los datos con el bloque en movimiento, el ángulo para que el movimiento continúe es generalmente menor y obtenemos

$$\frac{\text{Fuerza para continuar el movimiento}}{\text{Fuerza normal}} = \mu_k$$

A esta constante se le llama coeficiente de fricción cinética μ_k.

μ es una constante que depende de la superficie y se puede escribir simplemente.

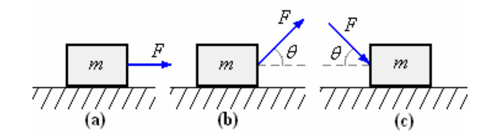
$F_f = \mu N$.

Algunos valores típicos de coeficientes de fricción.

Material	Sobre material	μ_s	μ_k
Acero	Acero	0,78	0,42
Cuero	Cuero	0,64	0,56
Cuero	Roble	0,60	0,50
Bronce	Hierro	0,40	0,30
Aluminio	Aluminio	1,05	1,40
Vidrio	Vidrio	0,92	0,40
Caucho	Asfalto	0,60	0,40
Caucho	Concreto	0,80	0,70
Caucho	Hielo	0,02	0,005
Piedra	Piedra	0,65	0,60

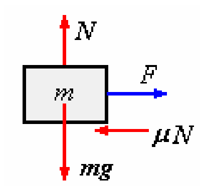
El hecho que la fuerza de fricción es independiente del área de contacto parece absurdo ya que las fuerzas intermoleculares son tanto mayores, cuanto mayor es la superficie de contacto. En realidad se debía esperar que F_f fuera proporcional a la superficie, lo que suceder es que si el cuerpo pesa muy poco, prácticamente no hay puntos de contacto entre las dos superficies (el área de contacto es despreciable). Cuando N aumenta, la superficie aumenta y F_f también, por lo tanto $F_f = \mu N$ donde se está incluyendo ya el aumento de superficie. Es decir, la fuerza de fricción F_f es proporcional a la fuerza normal N porque la verdadera superficie de contacto es proporcional a la fuerza normal.

Ejemplo 15. ¿Cuál es la fuerza mínima F necesaria para mover la masa m, siendo μ el coeficiente de rozamiento estático entre el piso y el bloque en cada uno de los casos siguientes?



Solución.

a) La figura muestra el D.C.L.



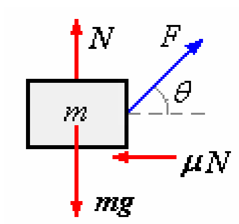
$$\sum F_y : \ N - mg = 0 \ \Rightarrow \ N = mg$$

$$\sum F_x : \ F - \mu N = 0 \ \Rightarrow \ F = \mu N$$

Luego:

$F = \mu mg$

b) La figura muestra el D.C.L.



$$\sum F_y : \ N + F\text{sen}\theta - mg = 0$$

$$\Rightarrow \ N = mg - F\text{sen}\theta$$

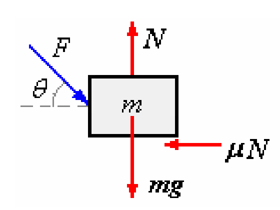
$$\sum F_x : \ F\cos\theta - \mu N = 0$$

$$\Rightarrow \ F\cos\theta = \mu N$$

De estas dos ecuaciones obtenemos:

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\theta + \mu \operatorname{sen}\theta}$$

c) La figura muestra el D.C.L.



$$\sum F_y :\ N - F\operatorname{sen}\theta - mg = 0$$

$$\Rightarrow\ N = mg + F\operatorname{sen}\theta$$

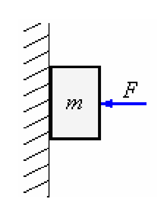
$$\sum F_x :\ F\cos\theta - \mu N = 0$$

$$\Rightarrow\ F\cos\theta = \mu N$$

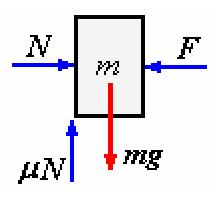
De estas dos ecuaciones obtenemos:

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\theta - \mu \operatorname{sen}\theta}$$

Ejemplo 16. ¿Cuál es el valor mínimo de *F* para sostener el bloque de masa *m* sobre una pared vertical, como se muestra en la figura, μ es el coeficiente de fricción estático entre la pared y el bloque?



Solución.
La figura siguiente muestra el D.C.L.



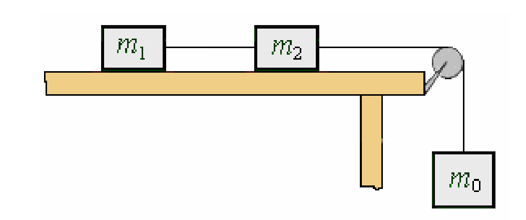
$$\sum F_y :\ N - F = 0\ \Rightarrow\ N = F$$

$$\sum F_x :\ \mu N - mg = 0\ \Rightarrow\ N = \frac{mg}{\mu}$$

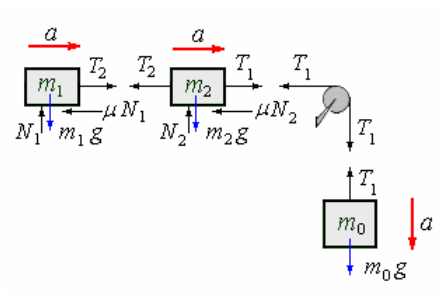
Por consiguiente

$$F = \frac{mg}{\mu}$$

Ejemplo 17. En el esquema de la figura las masas de la polea y del cable son despreciables y no hay rozamiento entre el cable y la polea. Hallar la aceleración del bloque m_0 y la tensión del cable que une los bloques m_1 y m_2. El coeficiente de rozamiento entre los bloques y el plano inclinado es μ .



Solución.



Para m_0: $\{m_0 g - T_1 = m_0 a$

Para m_2: $\begin{cases} T_1 - T_2 - \mu N_2 = m_2 a \\ N_2 - m_2 g = 0 \end{cases}$

Para m_1: $\begin{cases} T_2 - \mu N_1 = m_1 a \\ N_1 - m_1 g = 0 \end{cases}$

De estas ecuaciones obtenemos:

$N_2 = m_2 g$, $N_1 = m_1 g$

y $m_0 g - \mu(m_1 + m_2)g = (m_0 + m_1 + m_2)a$

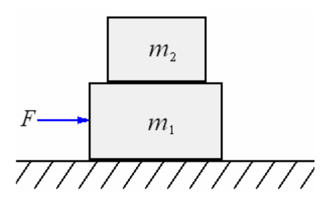
De aquí:

$$a = \frac{[m_0 - \mu(m_1 + m_2)]}{(m_0 + m_1 + m_2)} g$$

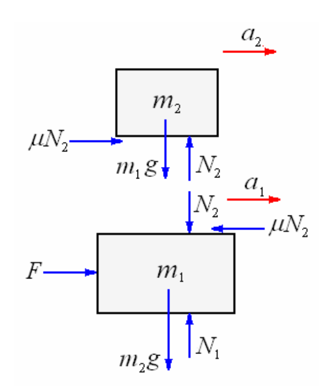
La tensión del cable que une los bloques m_1 y m_2:

$$T_2 = m_1(a + \mu g) = \frac{m_1 m_0}{(m_0 + m_1 + m_2)}(1 + \mu)g$$

Ejemplo 18. Se tiene una masa m_2 sobre una masa m_1 sobre un piso horizontal, tal como muestra la figura. Se aplica una fuerza horizontal F sobre la masa m_1. La masa carece de fricción. ¿Cuál es el valor máximo de F para que la masa m_1 no resbale sobre m_2. ¿Cuál es la aceleración resultante de los bloques?



Solución.
La figura muestra el D.C.L. de las masas m_1 y m_2.



Aplicando la Segunda Ley de Newton a la masa m_2, la que suponemos se mueve con aceleración a_2.

$\sum F_y : N_2 - m_2 g = 0$

$\sum F_x : \mu N_2 = m_2 a_2$

Aplicando la Segunda Ley de Newton a la masa m_1, la que suponemos se mueve con aceleración a_1.

$\sum F_y : N_1 - N_2 - m_1 g = 0$

$\sum F_x : F - \mu N_2 = m_1 a_1$

Trabajando con estas ecuaciones encontramos que

$F = m_1 a_1 + m_2 a_2$

La aceleración de la masa m_2 es:

$$a_2 = \frac{\mu N_2}{m_2} = \frac{\mu m_2 g}{m_2} = \mu g$$

Como el valor de μ varía desde 0 hasta el valor máximo $\mu_{máx}$:

$a_2 = \mu_{máx} g$ o simplemente $a_2 = \mu g$.

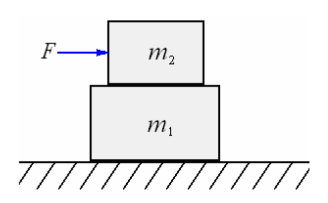
Pero como queremos encontrar el valor máximo posible de *F* para que las masas vayan juntas, es decir, para que m_1 no se quede, se tiene como condición que;

$a_1 = a_2 = \mu g$

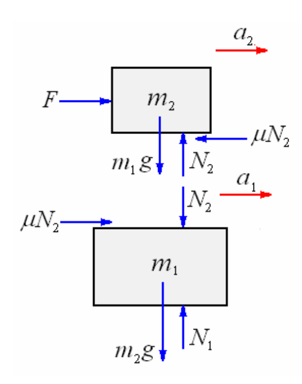
Luego: $F_{máx} = (m_1 + m_2)\mu_{máx} g$

Si aplicamos una fuerza mayor el bloque m_1 avanzará dejando atrás al bloque m_2.

Ejemplo 19. Usando el dispositivo del ejemplo anterior discuta el caso en ci que la fuerza *F* se aplica a la masa m_2.



Solución.
La figura muestra el D.C.L. para este caso



Las ecuaciones para la masa m_2 son

$\sum F_y : N_2 - m_2 g = 0$

$\sum F_x : F - \mu N_2 = m_2 a_2$

Las ecuaciones para la masa m_1 son.

$\sum F_y : N_1 - N_2 - m_1 g = 0$

$\sum F_x : \mu N_2 = m_1 a_1$

Trabajando con estas ecuaciones encontramos que

$F = m_1 a_1 + m_2 a_2$

La aceleración de la masa m_1 es:

$$a_1 = \frac{\mu N_2}{m_1} = \frac{\mu m_2 g}{m_1} = \mu g \frac{m_2}{m_1}$$

Como el valor de μ varía desde 0 hasta el valor máximo $\mu_{máx}$:

$$a_1 = \mu_{máx} g \frac{m_2}{m_1}$$

Como la condición de que las masas m_1 y m_2 vayan juntas es,

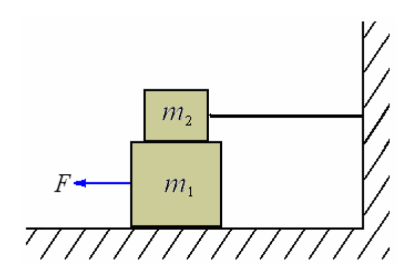
$a_1 = a_2$

Luego el valor máximo de *F* pera que m_1 y m_2 vayan juntas es,

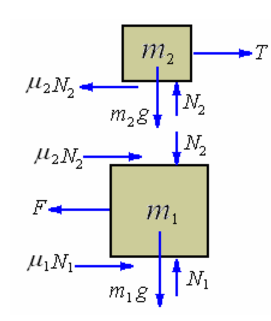
$$F_{máx} = \frac{(m_1 + m_2)m_2}{m_1} \mu_{máx} g$$

Ejemplo 20. En el dispositivo de la figura encontramos el valor mínimo de *F* para sacar la masa m_1.

El coeficiente de fricción entre m_1 y la mesa es μ_1 y el coeficiente de fricción entre m_1 y m_2 es μ_2.



Solución.
La figura muestra los D.C.L. de las masas m_1 y m_2



Considerando que el equilibrio es la condición mínima de inicio de movimiento
Aplicando la Segunda ley de Newton para la masa m_2.

$$\sum F_y : N_2 - m_2 g = 0$$

$$\sum F_x : \mu_2 N_2 - T = 0$$

Aplicando la Segunda Ley de Newton para la masa m_1

$$\sum F_y : N_2 - N_1 + m_1 g = 0$$

$$\sum F_x : F - \mu_1 N_1 - \mu_2 N_2 = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones

$$N_2 = m_2 g$$

$$T = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g$$

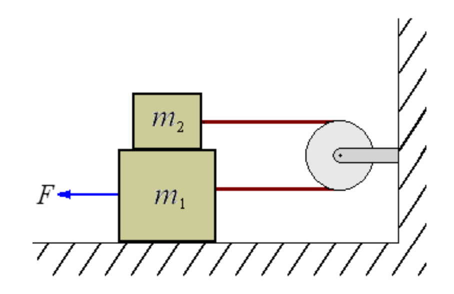
$$N_1 = N_2 + m_1 g = (m_1 + m_2) g$$

$$F = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2$$

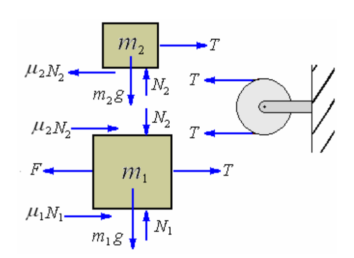
$$= \mu_1 (m_1 + m_2) g + \mu_2 m_2 g$$

Siendo este valor de *F* el mínimo para iniciar el movimiento de la masa m_1.

Ejemplo 21. En el dispositivo de la figura, encontrar el valor mínimo de *F* para sacar la masa m_1. El coeficiente de fricción entre m_1 y la mesa es μ_1, el coeficiente de fricción entre m_1 y m_2 es μ_2.



Solución.
La figura muestra el D.C.L.de las masas m_1 y m_2



Considerando que el equilibrio es la condición mínima de inicio del movimiento.
Aplicando la segunda ley de Newton a la masa m_2:

$$\sum F_y : N_2 - m_2 g = 0$$

$$\sum F_x : \mu_2 N_2 - T = 0$$

Aplicando la segunda ley de Newton para la masa m_1:

$$\sum F_y : N_2 - N_1 + m_1 g = 0$$

$$\sum F_x : F - \mu_1 N_1 - \mu_2 N_2 - T = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones

$$N_2 = m_2 g$$

$$T = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g$$

$$N_1 = N_2 + m_1 g = (m_1 + m_2) g$$

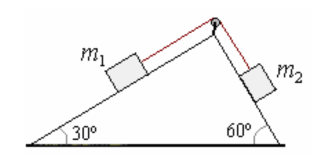
$$F = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 + T$$

$$= \mu_1 (m_1 + m_2) g + \mu_2 m_2 g$$

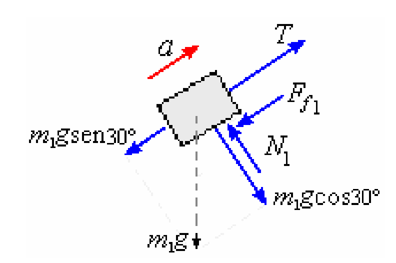
$$= [\mu_1 m_1 + m_2 (\mu_1 + \mu_2)] g$$

Siendo este valor de *F* el mínimo para iniciar el movimiento.

Ejemplo 22. Los bloques m_1 y m_2 de 20 y 60 kg, respectivamente, están unidos por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea sin rozamiento. El coeficiente de rozamiento cinético entre las masas y la superficie es 0,3. Determinar la velocidad del sistema 4 segundos después de partir del reposo.



Solución.
La figura muestra el D.C.L. de la masa m_1.
Consideremos que el movimiento es de izquierda a derecha con aceleración a



$$\sum F_y : N_1 - m_1 g\cos 30° = 0$$
$$\sum F_x : T - F_{f1} - m_1 g\text{sen}30° = m_1 a$$

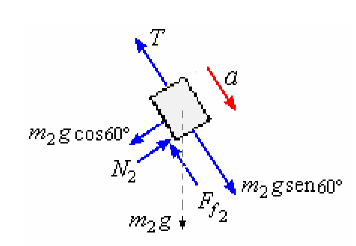
De estas ecuaciones

$$N_1 = m_1 g\cos 30° = 20\times 10\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 173\text{ N}$$
$$F_{f1} = \mu N_1 = 0{,}3\times 173 = 51{,}9\text{ N}$$

y $T - 51{,}9 - 20\times 10\times\frac{1}{2} = 20a$

$\Rightarrow T = 151{,}9 + 20a$

La figura muestra D.C.L. de la masa m_2.



$$\sum F_y : N_2 - m_2 g\cos 60° = 0$$
$$\sum F_x : m_2 g\text{sen}60° - F_{f2} - T = m_2 a$$

De estas ecuaciones

$$N_2 = m_2 g\cos 60° = 20\times 10\times\frac{1}{2} = 150\text{ N}$$
$$F_{f2} = \mu N_2 = 0{,}3\times 150 = 45\text{ N}$$

y $30\times 10\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 45 - T = 30a$

$\Rightarrow T = 214{,}5 - 30a$

Igualando los valores de *T*:

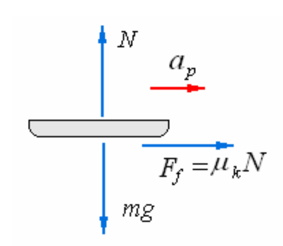
$$151{,}9 + 20a = 214{,}5 - 30a \Rightarrow a = 1{,}25\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Como $v = v_0 + at$,

Siendo $v_0 = 0 \Rightarrow v = 1{,}25t^2$

Para $t = 4\text{ s} \Rightarrow v = 1{,}25\times 4 = 5\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Ejemplo 23. En una mesa un plato descansa sobre el mantel, cuyo centro está a 0,25m del borde de la mesa. El mantel se jala súbitamente en forma horizontal con una aceleración constante de 10 m/s^2. El coeficiente de fricción cinético entre el mantel y el plato es $\mu_k = 0{,}75$. Asumiendo que el mantel llega justo al borde de la mesa.
Cuando el extremo del mantel pasa bajo el centro del plato, encontrar:
a) La aceleración del plato
b) La velocidad de! plato
c) La distancia del plato al borde de la mesa.
Solución.
a) Aplicando la segunda ley de Newton para el plato, la masa del plato es m y su aceleración a_p.



$$\sum F_V = 0 \Rightarrow mg - N = 0$$
$$\sum F_H = ma_p \Rightarrow F_f = ma_p$$

De aquí obtenemos:

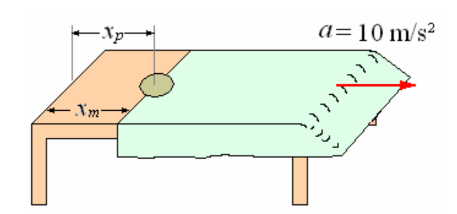
$N = mg$ y $\mu_k mg = ma_p$

De donde:

$a_p = \mu_k g = 0{,}75 \times 9{,}8 = 7{,}35$ m/s^2

El plato resbala ya que a_p es menor que 10 m/s^2

b) En el instante en que el extremo del mantel coincide con el centro del plato están a la misma distancia del borde de la mesa



$$x_p = x_m$$

$$x_p = 0{,}25 + \frac{1}{2}a_p t^2 = 0{,}25 + \frac{1}{2}7{,}35t^2$$

$$x_m = \frac{1}{2}a_m t^2 = \frac{1}{2}10t^2$$

Igualando

$$0{,}25 + \frac{1}{2}7{,}35t^2 = \frac{1}{2}10t^2$$

Resolviendo:

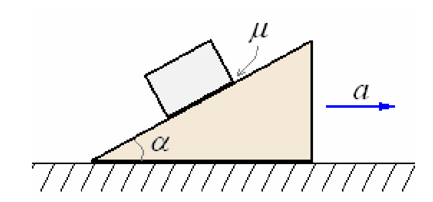
$t = 0{,}58\text{ s}$ y

$v_p = v_0 + a_p t = 0 + 7,35 \times 0,58$
$= 4,26$ m/s.

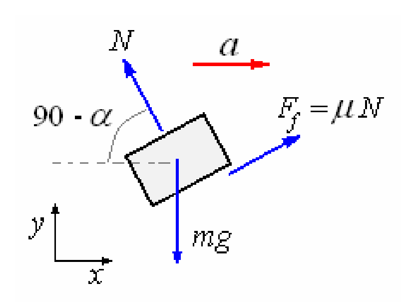
c) $x_p = 0,25 + \frac{1}{2} a_p t^2$

$= 0,25 + \frac{1}{2} 7,35 \times 0,58^2 = 1,49$ m

Ejemplo 24. El plano inclinado mostrado en la figura tiene una aceleración a hacia la derecha. Si el coeficiente de fricción estático entre el plano y el bloque es μ, encontrar la condición para que el bloque resbale.



Solución.
Consideremos que el bloque tiene masa m, la figura a continuación muestra su DCL.



Para que el bloque no resbale debe tener la misma aceleración a.
Aplicando la segunda ley de Newton

$\sum F_V = 0 \Rightarrow N\cos\alpha + \mu N \operatorname{sen}\alpha - mg = 0$

y $\sum F_H = ma \Rightarrow -N\operatorname{sen}\alpha + \mu N \cos\alpha = ma$

De estas ecuaciones

$N = \dfrac{mg}{\cos\alpha + \mu \operatorname{sen}\alpha}$ y

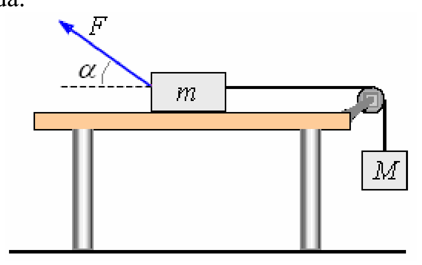
$\dfrac{mg}{((\cos\alpha + \mu \operatorname{sen}\alpha))}(-\operatorname{sen}\alpha + \mu\cos\alpha) = ma$

Finalmente

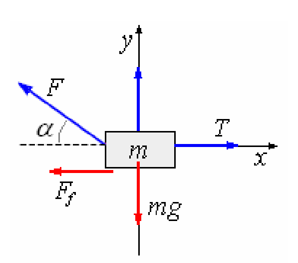
$a = \dfrac{(\mu\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)}{(\cos\alpha + \mu \operatorname{sen}\alpha)} g$

Este es el va1or crítico de a para que no resbale; el bloque resbalará para valores menores que el indicado.

Ejemplo 25. En el siguiente sistema mecánico, se aplica una fuerza F inclinada un ángulo α sobre el cuerpo de masa m, ubicado sobre la superficie horizontal con coeficiente de fricción μ. La polea por donde cuelga otro bloque de masa M no tiene roce y la cuerda se considera inextensible y de masa despreciable. Calcular la aceleración y la tensión de la cuerda.



Solución.
Se hacen los DCL y se aplica la segunda ley de Newton, suponiendo que el cuerpo de masa M desciende y tira a m hacia la derecha, lo que define el sentido de la aceleración.
Para m



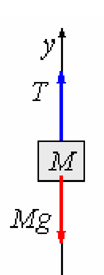
$\sum F_V = 0 \Rightarrow N + F\operatorname{sen}\alpha - mg = 0$

$\Rightarrow N = mg - F\operatorname{sen}\alpha$ (1)

y $\sum F_H = ma$

$\Rightarrow T - F\cos\alpha - F_f = ma$ (2)

Para M



$\sum F_V = -Ma$

$\Rightarrow T - Mg = -Ma$ (3)

Además: $F_f = \mu N$

De la ecuación (1):

$F_f = \mu(mg - F\operatorname{sen}\alpha)$ (4)

De (3) se despeja T:

$T = Mg - Ma$ (5)

Ahora 4) y (5) se reemplazan en (2), lo que permite despejar la aceleración

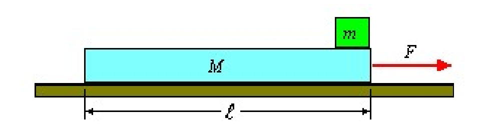
$$Mg - Ma - F\cos\alpha - \mu(mg - F\operatorname{sen}\alpha) = ma$$

$$a = \frac{(M - \mu m)g - F(\cos\alpha - \mu\operatorname{sen}\alpha)}{M + m}$$

y la tensión T

$$T = Mg - M\frac{(M - \mu m)g - F(\cos\alpha - \mu\operatorname{sen}\alpha)}{M + m}$$

Ejemplo 26. Una viga de masa M está situada en un plano horizontal. Sobre la viga se encuentra un cuerpo do masa m. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la viga, así como entre la viga y el plano es μ_k. Analizar el movimiento para diferentes valores do la fuerza F.



Solución.

Si $F \leq \mu_k(m + M)g$, no hay movimiento.

Supongamos que $F > \mu_k(m + M)g$. Analicemos el caso de ausencia de deslizamiento del cuerpo por la viga. Las ecuaciones del movimiento, en este caso, tendrían la siguiente forma:

$F_{fm} = ma$,

$Ma = F - F_{fm} - F_{fM} = F - F_{fm} - \mu_k(m + M)g$;

$F_{fm} \leq \mu_k mg$

de donde

$$a = \frac{F}{(m + M)} - \mu_k g,$$

$$F_{fm} = \frac{mF}{(m + M)} - \mu_k mg \leq \mu_k mg$$

que es posible, si

$k\,(m + M)\,g < F < 2k\,(m + M)\,g$.

Si $F > 2\mu_k(m + M)g$, entonces el cuerpo deslizará por la barra. En este caso las ecuaciones del movimiento tendrán la siguiente forma:

$ma_m = \mu_k mg$,

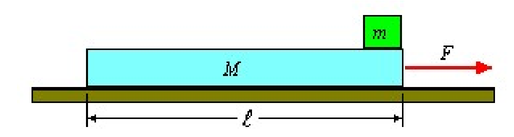
$Ma_M = F - \mu_k mg - \mu_k(M + m)g$

de donde

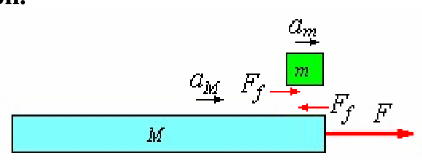
$$a_m = \mu_k g,\; a_M = \frac{F}{M} - \mu_k\frac{(2m + M)}{M}g$$

Que es fácilmente verificar en el caso de $a_M > a_m$

Ejemplo 27. Una viga do masa M está sobre un plano horizontal liso, por el cual puede moverse sin fricción. Sobre la viga hay un cuerpo do masa m. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la viga es μ_k. ¿Con qué valor de la fuerza F que actúa sobre la viga en dirección horizontal, el cuerpo comienza a deslizarse sobre la viga? ¿Dentro do cuánto tiempo el cuerpo caerá de la viga? La longitud do la viga es ℓ.



Solución.



Las ecuaciones del movimiento de la viga y del cuerpo tienen la siguiente forma:

$F_{fm} = ma_m$, (1)

$F - \mu_k mg = Ma_M$ (2)

Donde F_{fm} es la fuerza do rozamiento, a_m y a_M son las aceleraciones.

Supongamos que no hay deslizamiento, entonces $a_m = a_M$

De las ecuaciones del movimiento podemos determinar la aceleración y la fuerza de rozamiento.

La fuerza de rozamiento es $F_{fm} = \dfrac{mF}{(m + M)}$

Para que no haya deslizamiento la fuerza de rozamiento debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$F_{fm} \leq \mu_k mg$, es decir, $\dfrac{F}{(m + M)} \leq \mu_k g$.

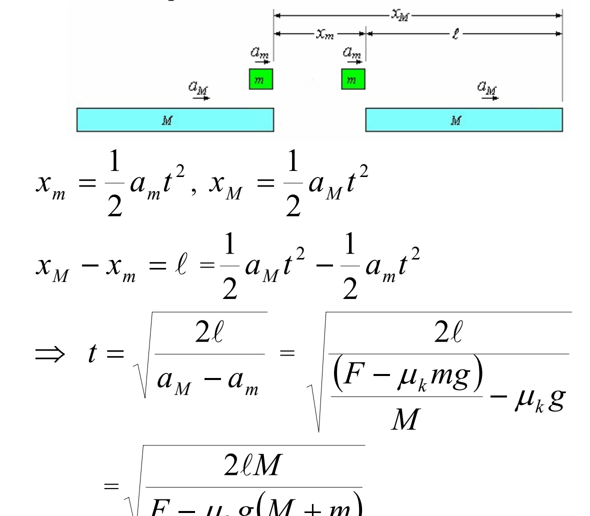
Si $F > \mu_k\,(M + m)\,g$, entonces surge el deslizamiento. Las ecuaciones (1) y (2) en este caso deben escribirse en la siguiente forma:

$ma_m = \mu_k mg$, $Ma_M = F - \mu_k mg$

De estas ecuaciones obtenemos a_m y a_M:

$$a_m = \mu_k g,\; a_M = \frac{(F - \mu_k mg)}{M}.$$

Es evidente que $a_M > a_m$.



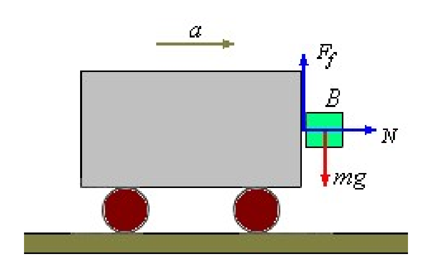
$$x_m = \frac{1}{2}a_m t^2,\; x_M = \frac{1}{2}a_M t^2$$

$$x_M - x_m = \ell = \frac{1}{2}a_M t^2 - \frac{1}{2}a_m t^2$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\ell}{a_M - a_m}} = \sqrt{\frac{2\ell}{\frac{(F - \mu_k mg)}{M} - \mu_k g}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\ell M}{F - \mu_k g(M + m)}}$$

Ejemplo 28. En la figura, encontrar la aceleración del carro requerida para evitar que caiga el bloque *B*. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el carro es μ_k .



Solución.

Si el bloque no cae, la fuerza de fricción, F_f, debe balancear el peso del bloque:

$F_f = mg$.

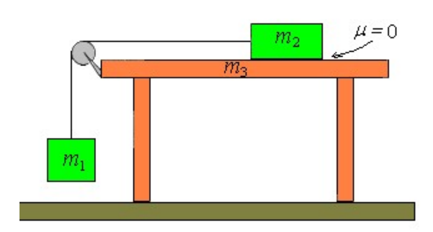
Pero el movimiento horizontal del bloque está dado por y $N = ma$.

Luego,

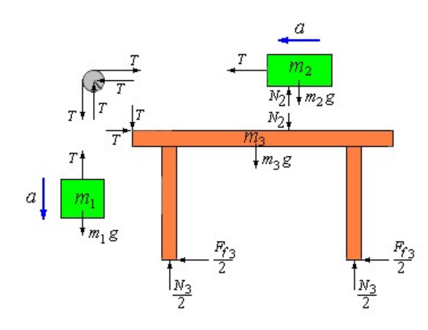
$$\frac{F_f}{N} = \frac{g}{a} \Rightarrow a = \frac{g}{F_f/N}$$

Como el valor máximo de $\frac{F_f}{N}$ es μ_s , debemos tener $a \geq \frac{g}{\mu_s}$ si el bloque no cae.

Ejemplo 29. Dos cuerpos, de las masas m_1 y m_2, se liberan de la posición mostrada en la figura. Si la masa de la mesa de superficie lisa (sin fricción) es m_3, encuentre la reacción del piso sobre la mesa mientras los dos cuerpos están en movimiento. Asuma que la mesa permanence inmóvil.



Solución. La figura muestra los diagramas de cuerpo libre de cada uno de los elementos.



Cuerpo 1: $\sum F_{verticales} = m_1g - T = m_1a$

Cuerpo 2: $\sum F_{horizontales} = T = m_2a$

Mesa: $\begin{cases} \sum F_{verticales} = N_3 - N_2 - T - m_3g = 0 \\ \sum F_{horizontales} = T - F_{f3} = 0 \end{cases}$

Donde N_3 y F_{f3} (fricción) las componentes verticales y horizontales de la fuerza ejercida por el piso sobre la mesa.

(Asumimos que las patas de la izquierda y de la derecha comparten la carga igualmente. Esto no afecta nuestro análisis)

De las primeras dos ecuaciones,

$$a = \frac{m_1g}{(m_1 + m_2)}$$

Luego, $F_{f3} = T = m_2a = \frac{m_1m_2g}{(m_1 + m_2)}$

Finalmente,

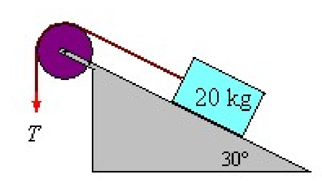
$$N_3 = T + m_2g + m_3g$$

$$= \left[\frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)} + m_2 + m_3\right]$$

Ejemplo 30. Se tiene un bloque de 20 kg sobre un plano inclinado que está sujeto a una cuerda (ver figura). Las superficies de contacto entre el bloque y el plano inclinado son rugosas con coeficiente de fricción cinética $\mu_k = 0,5$ y el de fricción estática $\mu_s = 0,7$.

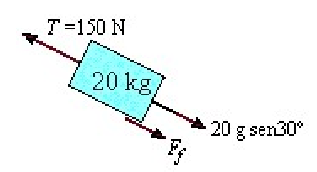
a) Si la tensión de la cuerda es de 150 N, determine la magnitud y sentido de la fuerza de rozamiento.

b) Si por un accidente se corta la cuerda, determine la aceleración del bloque.



Solución.

a)

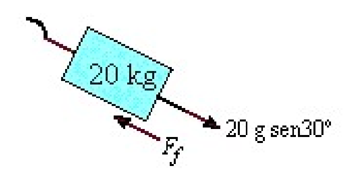


$$T - mg\text{sen}30^\circ - F_f = 0 \Rightarrow$$

$$F_f = T - mg\text{se}30^\circ = 150 - 100 = 50\ \text{N}$$

en el sentido indicado en la figura (hacia abajo).

b)



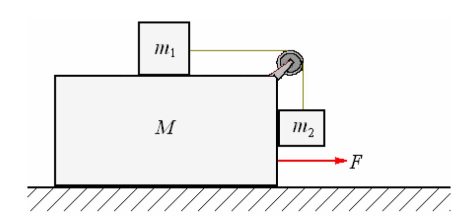
Cuando se rompe la cuerda para iniciar el movimiento debe vencerse a la máxima fuerza de fricción estática:

$$F_{fs} = \mu_s mg\cos 30^\circ = 0{,}7\left(20g\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 173\ \text{N}$$

Como $20g$ sen 30º = 100 N

100 N < 173 N, el movimiento no se inicia , por lo tanto la aceleración del bloque es cero.

Ejemplo 31. Determinar la fuerza F aplicada al bloque de masa M de la figura adjunta, para que los bloques de masas m_1 y m_2 apoyados en M, no se muevan respecto de M. Todas las superficies son lisas, la polea y el cable tienen masa despreciable.



Solución.

Consideremos un sistema de referencia fijo en el suelo con el eje x paralelo a la fuerza aplicada

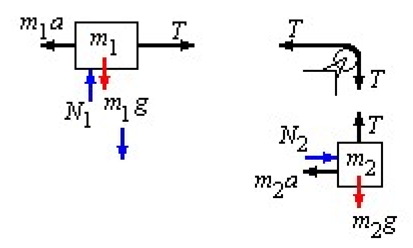


$\vec{F}$.

De la primera ley de Newton aplicada al conjunto se tiene:

$$\vec{F} = (M + m_1 + m_2)\vec{a} \qquad (1)$$

Siendo $\vec{a}$ la aceleración del conjunto. Las masas m_1 y m_2 están en reposo sobre el bloque M, luego en la referencia O su aceleración es del conjunto. La fuerza que ejerce el cable sobre m_1 y la que ejerce sobre m_2 tiene el mismo módulo T.



La segunda ley de Newton para m_1 es

$$T - m_1 a = 0\,,\quad N_1 - m_1 g = 0$$

De aquí $\Rightarrow T = m_1 a$ (2)

La segunda ley de Newton para m_2 es

$$N_2 - m_2 a = 0\,,\quad T - m_2 g = 0$$

De aquí $\Rightarrow T = m_2 g$ (3)

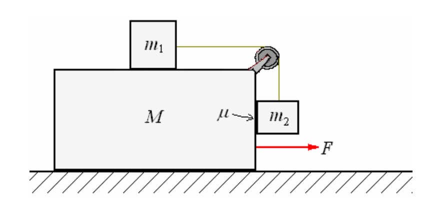
De (2) y (3) se tiene

$$\Rightarrow a = \frac{m_2}{m_1} g \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (1) se obtiene la fuerza aplicada a M

$$F = \frac{m_2}{m_1}(M + m_1 + m_2)g$$

Ejemplo 32. Determinar la aceleración mínima con que debe desplazarse el bloque de masa M en sentido horizontal para que los bloques de masas m_1 y m_2 no se muevan respecto de M, siendo μ el coeficiente de rozamiento entre los bloques. La polea y el cable tienen masa despreciable.



Solución.

Consideremos un sistema de referencia fijo en el suelo con el eje x paralelo a la fuerza aplicada

$\vec{F}$.

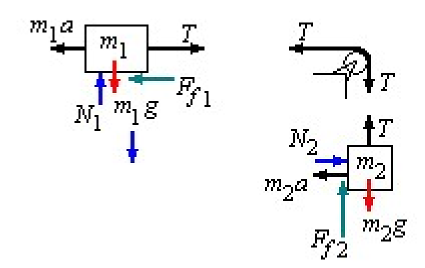
De la segunda ley de Newton aplicada al conjunto se tiene:

$$\vec{F} = (M + m_1 + m_2)\vec{a} \qquad (1)$$

Siendo $\vec{a}$ la aceleración del conjunto.

Las masas m_1 y m_2 están en reposo sobre el bloque M, luego en la referencia O su aceleración es del conjunto.

La fuerza que ejerce el cable sobre m_1 y la que ejerce sobre m_2 tiene el mismo módulo T.



La segunda ley de Newton para m_1 es

$$T - m_1 a - F_{f1} = 0,\ N_1 - m_1 g = 0$$

$$F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1 g$$

$$\Rightarrow T = m_1 a + \mu m_1 g \qquad (2)$$

La segunda ley de Newton para m_2 es

$$N_2 - m_2 a = o,\ T + F_{f2} - m_2 g = 0$$

$$F_{f2} = \mu N_2 = \mu m_2 a$$

$$\Rightarrow T = m_2 g - \mu m_2 g \qquad (3)$$

De (2) y (3) se tiene $\Rightarrow$

$$m_1 a + \mu m_1 g = m_2 g - \mu m_2 g$$

$$a = \frac{(m_2 - \mu m_1)}{(m_1 + \mu m_2)} g \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (1) se obtiene la fuerza aplicada a M

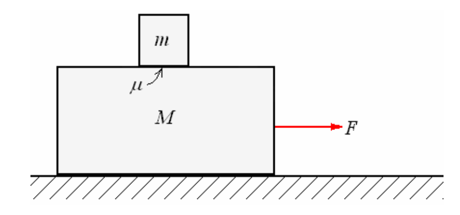
$$F = \frac{m_2}{m_1}(M + m_1 + m_2) g$$

Ejemplo 33. Un bloque de masa m se encuentra sobre otro bloque de masa M que está apoyado sobre una superficie horizontal lisa. El coeficiente de rozamiento entre los dos bloques es μ. Al bloque M se le aplica una fuerza horizontal dirigida hacia la derecha que depende del tiempo según la ley $F = k\,t$.

Determinar:

a) El instante τ en que m empieza a deslizar sobre M.

b) La aceleración de cada uno de los bloques.



Solución.

Diagrama del cuerpo libre del conjunto

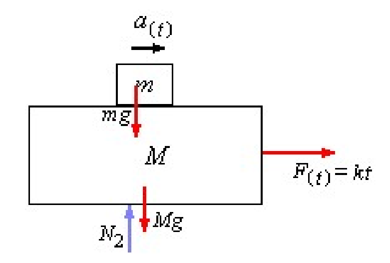
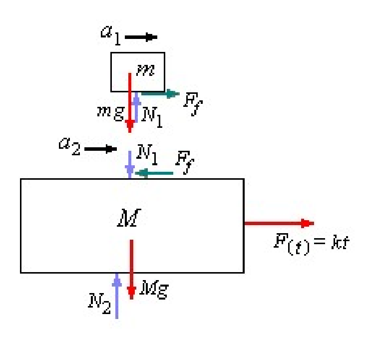


Diagrama del cuerpo libre masas separadas



a) Consideremos un sistema de referencia fijo en el suelo con el eje x paralelo a la fuerza aplicada $\vec{F}$.

Sea τ el instante en que m empieza a deslizar sobre M. Hasta dicho instante $t \leq \tau$, el conjunto se mueve con una aceleración común $\vec{a}$.

La segunda ley de Newton aplicada al conjunto en el instante $t = \tau$ es

$$k\tau = (M + m) a_{(\tau)},\ N_2 - (M + m) g = 0$$

$$\Rightarrow a_{(\tau)} = \frac{k}{(M + m)} \tau \qquad (1)$$

La segunda ley de Newton aplicada a la masa m en el instante $t = \tau$ es, (la fuerza de rozamiento sobre m tiene, en ese instante, su valor máximo $F_f = \mu\, m\, g$)

$$F_f = \mu N_1 = m a_{(\tau)},\ N_1 = mg$$

$$\Rightarrow a_{(\tau)} = \frac{\mu m g}{m} = \mu g \qquad (2)$$

De (1) y (2) queda $\Rightarrow \tau = \dfrac{(M + m)}{k} \mu g$ s

b) De (1) se tiene que la aceleración del conjunto para $t < \tau$ es

$$\Rightarrow a_{1(t)} = a_{(t)} = \frac{k}{(M + m)} t$$

Para $t > \tau$. Las fuerzas que actúan sobre m son constantes, luego la aceleración de m es

$$a_1 = a_{(\tau)} = \mu g$$

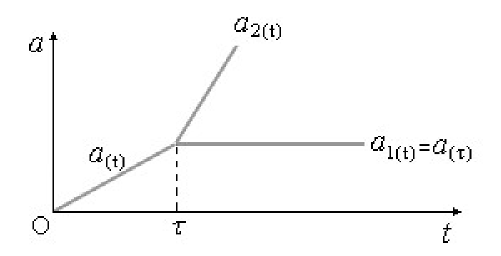
La segunda ley de Newton aplicada a la masa M es

$$kt - F_f = kt - \mu N_1 = M a_{2(t)},\ \text{como}\ N_1 = mg$$

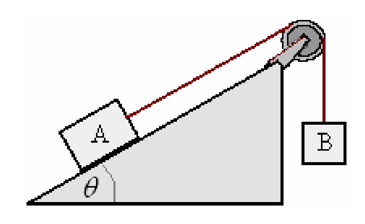
$$\Rightarrow kt - \mu m g = M a_{2(t)}\ \text{y}$$

$$a_{2(t)} = -\mu g \frac{m}{M} + \frac{k}{M} t \quad \frac{m}{s^2}$$

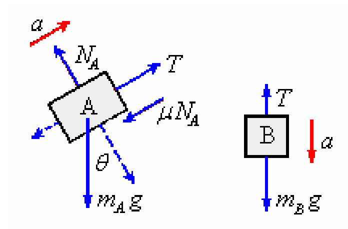
Gráfica de las aceleraciones en función del tiempo



Ejemplo 34. Dos bloques A y B de masas m_A y m_B están unidos mediante un cable que pasa a través de una polea tal como se muestra en la figura adjunta. El coeficiente de rozamiento entre el bloque A y el plano inclinado es μ. Determinar el sentido del movimiento cuando se dejan en libertad a partir del reposo. El cable es inextensible y las masas del cable y la polea despreciables.



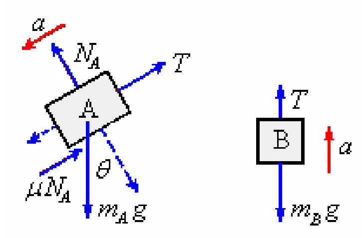
Solución.
Supongamos que el bloque A sube sobre el plano inclinado. Sea T la fuerza que ejercen los extremos del cable sobre los bloques dirigida, en ambos bloques, tal como se indica.



El movimiento de B es hacia abajo, luego
$\Rightarrow m_B g > T$
El movimiento de A es hacia arriba, luego
$\Rightarrow T > m_A g\text{sen}\theta + \mu m_A \cos\theta$
El movimiento de los bloques es el indicado si
$\Rightarrow m_B g > m_A g\text{sen}\theta + \mu m_A \cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{m_B}{m_A} > \text{sen}\theta + \mu\cos\theta$$

Supongamos que el bloque A desciende sobre el plano inclinado.



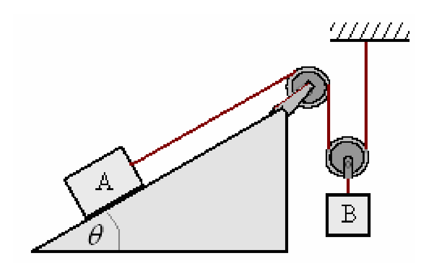
El movimiento de B es hacia arriba, luego
$\Rightarrow m_B g < T$
El movimiento de A es hacia abajo, luego
$\Rightarrow T + \mu m_A \cos\theta < m_A g\text{sen}\theta$
El movimiento de los bloques es el indicado si
$\Rightarrow m_B g < m_A g\text{sen}\theta - \mu m_A \cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{m_B}{m_A} < \text{sen}\theta - \mu\cos\theta$$

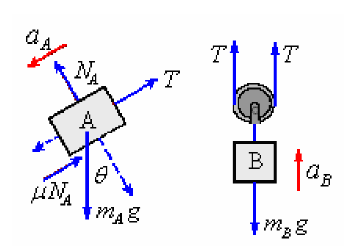
Los bloques no se mueven si

$$\Rightarrow \text{sen}\theta - \mu\cos\theta < \frac{m_B}{m_A} < \text{sen}\theta + \mu\cos\theta$$

Ejemplo 35. Dos bloques A y B de masas m_A = 10 kg y m_B = 7 kg, están unidos mediante un cable que pasa a través de las poleas tal como se muestra en la figura adjunta. El coeficiente de rozamiento entre el bloque A y el plano inclinado es μ = 0,10 y θ = 30º. El cable es inextensible y las masas del cable y las poleas son despreciables. Determinar:
a) Las aceleraciones de los bloques;
b) La tensión del cable.



Solución.



Supongamos que el movimiento de A es hacia abajo, luego:
$T + \mu m_A g\cos\theta < m_A g\text{sen}\theta$
$\Rightarrow T < m_A g\text{sen}\theta - \mu m_A g\cos\theta$
El movimiento de B es hacia arriba, luego:
$m_B g < 2T$
De ambas expresiones queda

$$\frac{1}{2} m_B g < m_A g\text{sen}\theta - \mu m_A g\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}(7) < (10)\text{sen}30^{\circ} - 0{,}10(10)\cos 30^{\circ}$$

Con los valores $\Rightarrow$ 3,5 < 4,13
Desigualdad que se cumple, luego el movimiento es el previsto.

a) Consideremos un sistema de referencia con el eje x horizontal. Las posiciones de los bloques están relacionadas por la condición de ligadura

$$s_A + 2y_B = \text{constante},$$

Luego sus aceleraciones cumplen

$$a_A + 2a_B = 0 \Rightarrow a_B = -\frac{1}{2}a_A = a \qquad (1)$$

Fuerzas sobre los bloques

La segunda ley de Newton aplicada al bloque A es

$$m_A a_A = m_A g\,\text{sen}\,\theta - T - \mu N_A,$$

$$N_A - m_A g \cos\theta = 0$$

De estas dos obtenemos:

$$T = m_A g(\text{sen}\,\theta - \mu\cos\theta) - m_A a_A \qquad (2)$$

La segunda ley de Newton aplicada al bloque B es

$$2T - m_B g = m_B a_B$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m_B(a_B + g) \qquad (3)$$

Igualando las ecuaciones (2) y (3),

$$m_B(a_B + g) = 2m_A g(\text{sen}\,\theta - \mu\cos\theta) - 2m_A a_A$$

Teniendo en cuenta la ecuación (1) y los valores:

$$7(a + 9{,}8) = 2(10)(9{,}8)(0{,}5 - 0{,}1\times 0{,}87) - 20(2a)$$

Resolviendo:

$a = 0{,}26$ m/s^2

Las aceleraciones de los bloques son :

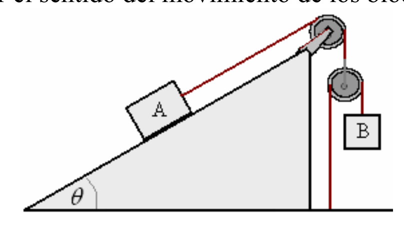
$a_A = 0{,}26$ m/s^2 para arriba.

$a_B = 0{,}52$ m/s^2 para abajo.

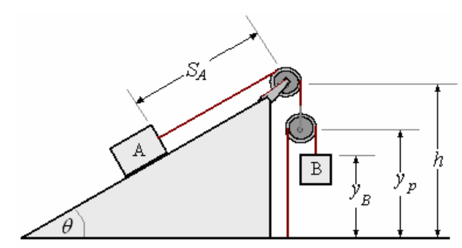
b) La magnitud de la tensión del cable es el valor de la fuerza que el cable ejerce sobre los bloques. De la ecuación (3) se tiene

$$T = \frac{1}{2}(7)(0{,}26 + 9{,}8) = 35{,}2 \text{ N}$$

Ejemplo 36. Dos bloques A y B de masas m_A y m_B están unidos mediante un cable que pasa a través de las poleas tal como se muestra en la figura adjunta. El coeficiente de rozamiento entre el bloque A y el plano inclinado es μ. El cable es inextensible y las masas del cable y la polea son despreciables. Estudiar el sentido del movimiento de los bloques.



Solución.



Supongamos que el bloque A asciende por el plano inclinado. Consideremos un sistema de referencia con el eje x horizontal.

Las posiciones, por una parte, del bloque A y de la polea móvil, están relacionadas por las condiciones de ligadura

$$s_A + h - y_p = \text{constante}$$

Las posiciones de la polea y el bloque B, están relacionadas por las condiciones de ligadura

$$2y_p - y_B = \text{constante}$$

De estas dos ecuaciones obtenemos:

$$2s_A + 2h - y_B = \text{constante}$$

Las componentes de las aceleraciones de los bloques satisfacen la condición

$$2a_A = a_B \qquad (1)$$

Sean T_A y T_B las fuerzas que los cables ejercen sobre los respectivos bloques. Fuerzas sobre los bloques y sobre la polea móvil.

Como la polea superior tiene masa despreciable solo cambia el sentido de la fuerza.

La masa de la polea móvil es cero, luego

La tensión en ambos lados son iguales (T_B) y

$$T_A = 2T_B \qquad (2)$$

De la segunda ley de Newton aplicada al bloque A se tiene:

$$T_A - m_A g\,\text{sen}\,\theta - \mu N_A = m_A a_A$$

$$N_A - m_A g\cos\theta = 0$$

De estas ecuaciones obtenemos:

$$T_A = m_A g(\text{sen}\,\theta + \mu\cos\theta) + m_A a_A \qquad (3)$$

De la segunda ley de Newton aplicada al bloque B se tiene

$$m_B g - T_B = m_B a_B$$

$$\Rightarrow T_B = m_B(g - a_B) \qquad (4)$$

De las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) obtenemos:

$$m_A g(\text{sen}\,\theta + \mu\cos\theta) + m_A a_A = 2m_B(g - 2a_A)$$

$$a_A = \frac{2m_B g - m_A g(\text{sen}\,\theta + \mu\cos\theta)}{m_A + 4m_B}$$

El movimiento es el indicado, si se cumple:

$$\frac{2m_B}{m_A} > (\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta)$$

El movimiento es de sentido opuesto, si se cumple:

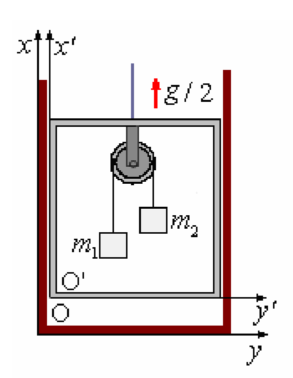
$$\frac{2m_B}{m_A} < (\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta)$$

El signo menos es porque en este caso el peso de la masa A es el que mueve al sistema y la fuerza de rozamiento está en sentido contrario a éste.

Ejemplo 37. A los extremos de un hilo que pasa a través de una polea fija al techo de la cabina de un ascensor se atan los cuerpos de masa m_1 y m_2 $(m_1 < m_2)$. La cabina comienza a subir con una aceleración constante g / 2. Despreciando la masa de la polea y la del hilo, así como el rozamiento, calcular:

a) La aceleración de m_1 y m_2 respecto de la cabina y con relación al foso del ascensor.

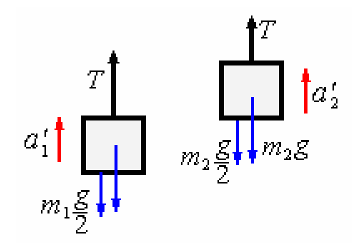
b) La fuerza con la cual la polea actúa sobre el techo de la cabina.



Solución.

a) El ascensor constituye una referencia no inercial en traslación que se mueve con una aceleración constante en sentido ascendente respecto de una referencia fija.

Seleccionemos una referencia con origen O′ en un punto del ascensor. La aceleración del origen O′ respecto de la referencia fija O es la aceleración del ascensor $\frac{1}{2}g\hat{j}$. Sean $a'_1\,\hat{j}$ la aceleración de m_1 y $a'_2\,\hat{j}$ la aceleración de m_2 en la referencia O'.



Las fuerzas exteriores que actúan sobre la m_1 son la tensión del cable T y el peso $m_1 g$, y sobre m_2 son la tensión del cable T y el peso $m_2 g$.

De la ecuación fundamental de la dinámica en la referencia no inercial se tiene

$$m_1 a'_1 = T - m_1 g - m_1\frac{g}{2}$$

$$\Rightarrow m_1 a'_1 = T - \frac{3}{2}m_1 g \qquad (1)$$

$$m_1 a'_2 = T - m_2 g - m_2\frac{g}{2}$$

$$\Rightarrow m_1 a'_2 = T - \frac{3}{2}m_2 g \qquad (2)$$

De la condición de ligadura para los bloques se tiene

$$a'_1 + a'_2 = 0 \;\Rightarrow\; a'_1 = -a'_2 = a' \qquad (3)$$

De las ecuaciones (1), (2) y (3) se obtiene

$$m_1 a' = T - \frac{3}{2}m_1 g \;\text{ y }\; m_1 a' = -T + \frac{3}{2}m_2 g$$

Sumando estas ecuaciones:

$$(m_2 + m_1)a' = \frac{3}{2}(m_2 - m_1)g$$

Despejando a'

$$a' = \frac{3}{2}\frac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)}g$$

Finalmente:

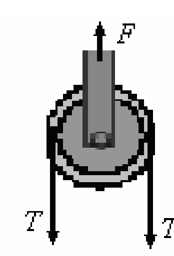
$$\vec{a'}_1 = a'\,\hat{j} \;\text{ y }\; \vec{a'}_2 = -a'\,\hat{j}$$

En la referencia fija, las aceleraciones de m_1 y de m_2 se obtienen de sumar a las anteriores la aceleración del ascensor

$$a_1 = \frac{g}{2} + a' = \frac{(2m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)}g \;\text{ y}$$

$$a_2 = \frac{g}{2} - a' = \frac{(2m_1 - m_2)}{(m_2 + m_1)}g$$

b)



La fuerza que la polea ejerce sobre el techo de la cabina es

$$F - 2T = 0 \;\Rightarrow\; F = 2T$$

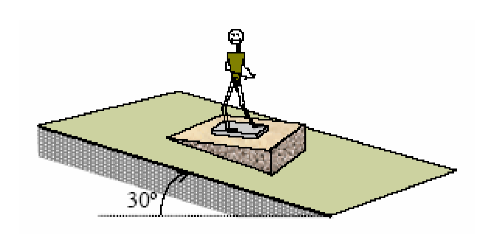
De la ecuación (1) y (3) se tiene

$$T = m_1\left(a'_1 + \frac{3}{2}g\right) = \frac{3m_1 m_2}{(m_2 + m_1)}g$$

Luego

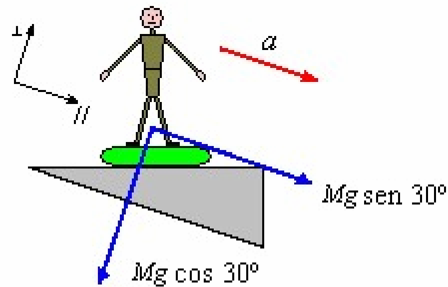
$$F = 2T = \frac{6m_1m_2}{(m_2 + m_1)}$$

Ejemplo 38. Un niño de masa m = 45 kg se pesa en una báscula de resorte situada sobre una plataforma especial que se desplaza por un plano inclinado de ángulo θ= 30º como muestra la figura (no hay rozamiento entre la plataforma y el plano inclinado). ¿Cuál será la lectura de la báscula en estas condiciones?



Solución.

Sea M la masa del conjunto niño - cuña., y a la aceleración con la que desliza hacia abajo el conjunto.



Aplicando la segunda ley de Newton al conjunto niño - cuña.

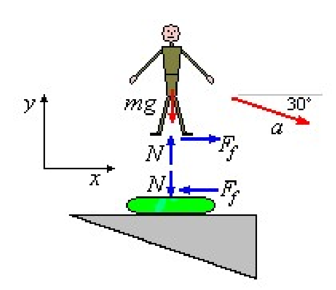
$$\sum F_{//} = Ma \Rightarrow Mg\text{sen}30^\circ = Ma \Rightarrow$$

$$a = g\text{sen}30^\circ = \frac{g}{2}$$

La aceleración del conjunto es $a = \frac{1}{2}g$

Solución en una referencia inercial.

Sobre el niño actúan: su peso mg y la reacción F_f en el apoyo. La indicación de la báscula el valor de la normal.



Aplicando la segunda ley de Newton al DCL del niño.

$$\sum F_x = F_f - ma\cos 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = N - mg + ma\text{sen}30^\circ = 0 \quad (2)$$

de (1) $\Rightarrow$ $F_f = 45\frac{g}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 191N$

de (2) $\Rightarrow$

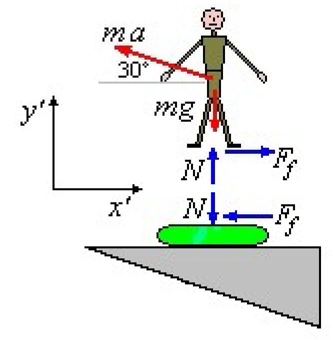
$$N = mg - ma\text{sen}30^\circ = 45\left(g - \frac{g}{4}\right)$$

= 33,45 Kg.

Siendo N la cantidad que marca la báscula.

Solución en una referencia no inercial .

Seleccionemos una referencia con origen O′ (x',y') en un punto de la plataforma. El niño está en reposo sobre la plataforma.



Aplicando la segunda ley de Newton al DCL del niño.

$$\sum F_x = F_f = ma\cos 30^\circ \quad (1)$$

$$\sum F_y = N - mg = -ma\text{sen}30^\circ \quad (2)$$

de (1) $\Rightarrow$ $F_f = 45\frac{g}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 191N$

de (2) $\Rightarrow$

$$N = mg - ma\text{sen}30^\circ = 45\left(g - \frac{g}{4}\right)$$

= 33,45 kg

Siendo N la cantidad que marca la báscula.

Ejemplo 39. Un ascensor de masa total 3M es levantado bajo la acción de una fuerza F. El piso del ascensor está inclinado un ángulo θ, con respecto a la horizontal. Además, un bloque de masa M se apoya sobre el centro del piso rugoso del ascensor (con coeficiente de fricción estática μ).

a) Hallar la aceleración del ascensor.

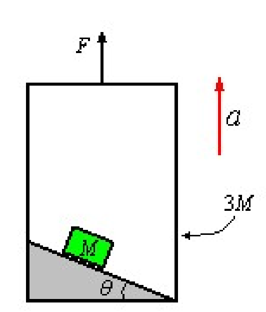
b) Haga el diagrama de cuerpo libre de la masa M.

c) ¿Cuál es el valor máximo de F para que el bloque dentro del ascensor no resbale respecto del piso del ascensor?

d) Si el ascensor pierde contacto con la fuerza F y empieza a caer libremente, calcule el valor de la fuerza normal entre el bloque y el piso del ascensor, y la fuerza de fricción sobre el bloque.

Solución.

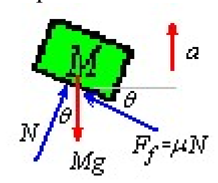
a) Para hallar la aceleración del ascensor.



$$F - 3Mg - Mg = (3M + M)a$$

$$\Rightarrow \ a = \frac{F - 4Mg}{4M} = \frac{F}{4M} - g$$

b) Diagrama de cuerpo libre de la masa *M*.



c) Para que el bloque dentro del ascensor no resbale respecto del piso del ascensor se debe cumplir

$$M(g + a)\text{sen}\theta \leq \mu M(g + a)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \ \mu \geq \tan\theta .$$

Como a depende de *F*, y a esta en miembros de la igualdad, el que el bloque resbale dentro del ascensor solamente depende del coeficiente de fricción.

d) Si el ascensor pierde contacto con la fuerza *F* y empieza a caer libremente,

$N = 0$, por lo tanto $F_f = 0$

DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR

La primera ley de Newton dice que un objeto permanecerá en movimiento uniforme en línea recta con velocidad constante o en reposo si no actúa una tuerza sobre él. Entonces cuando un objeto se mueve en trayectoria circular, debe haber una fuerza sobre él cambiándole la trayectoria recta. Esta fuerza puede ser proporcionada por la tensión en una cuerda, para un objeto que se hace girar en una circunferencia horizontal al extremo de una cuerda; por la fuerza de la gravedad para un satélite orbitando la tierra.

Los objetos en movimiento circular no están en equilibrio, debe haber una fuerza resultante, de otro modo sólo habría un movimiento en línea recta.

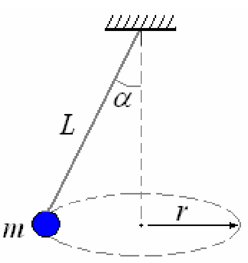
FUERZA CENTRÍPETA.

Una partícula que se mueve sobre una trayectoria circular de radio *R* con rapidez constante, se encuentra sometida a una aceleración radial de magnitud v^2/R. Por la segunda ley de Newton, sobre la partícula actúa una fuerza en la dirección de hacia el centro de la circunferencia, cuya magnitud es:

$$F_c = ma_c = m\frac{v^2}{R}$$

Por ser proporcional a la aceleración centrípeta, la fuerza F_c se llama **fuerza centrípeta**. Su efecto es cambiar la dirección de la velocidad de un cuerpo. Se puede sentir esta fuerza cuando se hace girar a un objeto atado a una cuerda, ya que se nota el tirón del objeto. Las fuerzas centrípetas no son diferentes de otras fuerzas ya conocidas, su nombre se debe a que apunta hacia el centro de una trayectoria circunferencial. Cualquiera de las fuerzas ya conocida pueden actuar como fuerza centrípeta si producen el efecto correspondiente, como ser la tensión de una cuerda, una fuerza de roce, alguna componente de la normal, la fuerza gravitacional en el caso de movimientos de planetas y satélites, etc.

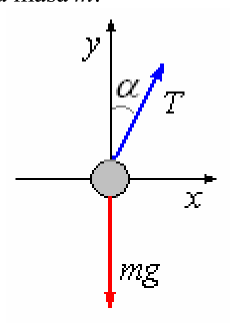
Ejemplo 40. Un cuerpo de masa *m*, sujeto al extremo de una cuerda de longitud *L*, que describe una trayectoria circular en el plano horizontal, genera una superficie cónica, por lo que se llama péndulo cónico. Determinar la rapidez y el período de revolución de la masa.



Solución.

La partícula está sometida a una aceleración centrípeta, y la fuerza centrípeta correspondiente está dada por la componente de la tensión de la cuerda en dirección radial hacia el centro de la circunferencia.

El D. C. L. de la masa *m*.



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow \ T\cos\alpha - mg = 0$$

$$\Rightarrow \text{T}\cos\alpha = mg \qquad (1)$$

y $\sum F_x = ma$

$$\Rightarrow \text{T}\text{sen}\alpha = ma = m\frac{v^2}{r} \qquad (2)$$

Dividiendo (2) entre (1):

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{rg} \ \Rightarrow \ v^2 = rg\tan\alpha$$

De la geometría de la figura, $r = L\,\text{sen}\alpha$, reemplazando se obtiene la rapidez de *m*:

$$v^2 = (L\,\text{sen}\alpha) g \tan\alpha$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{Lg \tan\alpha\, \text{sen}\alpha}$$

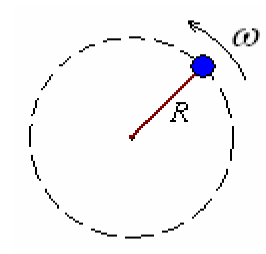
Para calcular el periodo *T,* esto es el tiempo que demora en dar una vuelta.
Se sabe que
$\Delta x = v\Delta t$, con $\Delta x = 2\pi r$, entonces:

$$\Delta t = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi L\,\text{sen}\alpha}{\sqrt{Lg \tan\alpha\, \text{sen}\alpha}}$$

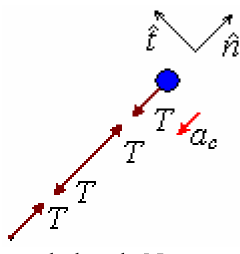
$$= 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\alpha}{g}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\alpha}{g}}$$

Ejemplo 41. Una bola de masa *m*, atada al extremo de una cuerda se hace ir en un plano horizontal formando una circunferencia de radio *R*. Si tiene una velocidad angular ω, ¿cuál es la tensión en la cuerda?



Solución.
La figura muestra el D.C.L.



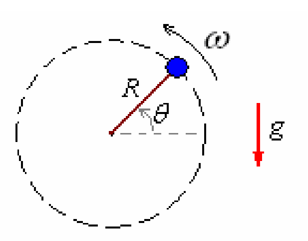
Aplicando la segunda ley de Newton a la masa m.

$$\sum F_n = ma_c \;\Rightarrow\; -T = -mR\omega^2$$

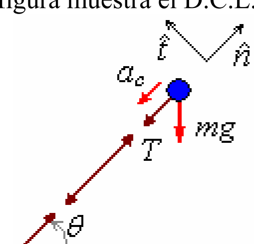
$$\sum F_t = ma_t \;\Rightarrow\; 0 = mR\alpha$$

La tensión en la cuerda es $T = mR\omega^2$. La fuerza tangencial es cero y la aceleración tangencial α también es cero, ya que la velocidad angular es constante.

Ejemplo 42. Resolver el problema anterior pero en el caso que el giro sea en el plano vertical.



Solución. La figura muestra el D.C.L.



Aplicando la segunda ley de Newton.

$$\sum F_n = ma_c \;\Rightarrow\; -T - mg\,\text{sen}\theta = -mR\omega^2$$

$$\sum F_t = ma_t \;\Rightarrow\; -mg\cos\theta = mR\alpha$$

La tensión en la cuerda es

$$T = mR\omega^2 - mg\,\text{sen}\theta$$

La fuerza tangencial es $-mg\cos\theta$ y la aceleración angular es

$$\alpha = -\frac{g}{R}\cos\theta$$

Como $\alpha = \dfrac{d^2\theta}{dt}$, obtenemos la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\theta}{dt} = -\frac{g}{R}\cos\theta$$

cuya solución esta fuera del alcance de este curso. Pero podríamos encontrar la tensión y fuerza tangencial para posiciones determinadas, es decir para valores dados de θ.

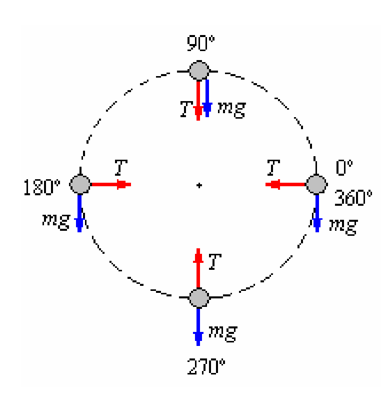
$$\text{Para } \theta = 0^\circ \begin{cases} T = mR\omega^2 \\ F_t = -mg \end{cases},$$

$$\text{Para } \theta = 90^\circ \begin{cases} T = mR\omega^2 - mg \\ F_t = 0 \end{cases},$$

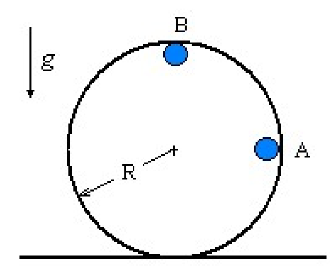
$$\text{Para } \theta = 180^\circ \begin{cases} T = mR\omega^2 \\ F_t = mg \end{cases},$$

$$\text{Para } \theta = 270^\circ \begin{cases} T = mR\omega^2 + mg \\ F_t = 0 \end{cases},$$

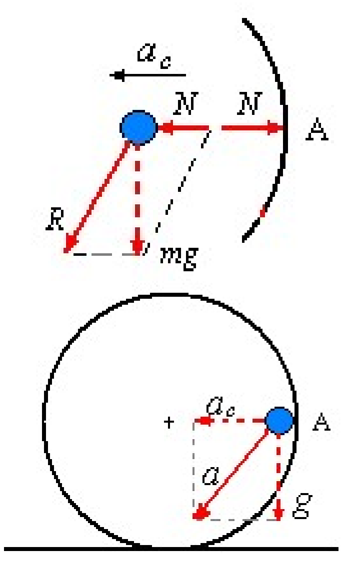
$$\text{Para } \theta = 360^\circ \begin{cases} T = mR\omega^2 \\ F_t = -mg \end{cases}$$



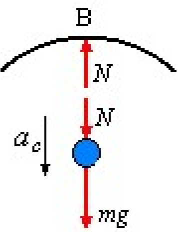
Ejemplo 43. Un pequeño bloque de masa *m* se desliza sobre una superficie lisa circular de radio *R* como se muestra en la figura. (La pista está sobre un plano vertical y *g* = aceleración de la gravedad)
a) Trace el diagrama de cuerpo libre del bloque cuando se encuentra en "A" y muestre (dibujando los vectores) la dirección de la fuerza resultante y su aceleración.
b) Cuando está en "A", ¿su rapidez aumenta o disminuye? (Justifique)
c) Si en "B" su velocidad es nula, ¿cuál es la trayectoria que seguirá la masa *m?*
d) Si en "B" su velocidad es $\sqrt{gR}$, ¿qué trayectoria seguirá la masa m?



Solución.
a) Trace el diagrama de cuerpo libre del bloque cuando se encuentra en "A" y muestre (dibujando los vectores) la dirección de la fuerza resultante y su aceleración.



b) Cuando el bloque está en A se dirige a B, su velocidad es en el sentido antihorario y su aceleración en el sentido horario. Luego su rapidez disminuye.
c) Si en "B" su velocidad es nula, ¿cuál es la trayectoria que seguirá la masa *m?*



$$N + mg = ma_c = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow N = -mg + m\frac{v^2}{R}$$

Si $v = 0$, el valor de N es negativo, lo que no permite al bloque sostenerse sobre la circunferencia, por consiguiente el bloque caerá verticalmente.
d) Si en "B" su velocidad es $\sqrt{gR}$, ¿qué trayectoria seguirá la masa m?

$$N = -mg + m\frac{v^2}{R} \Rightarrow N = -mg + m\frac{gR}{R} = 0,$$

el bloque tiene suficiente velocidad para seguir en la trayectoria circular.

Ejemplo 44. Un avión describe un rizo (un camino circular en un plano vertical) de 150 m de radio. La cabeza del piloto siempre apunta al centro del rizo. La rapidez del avión no es constante; es mínima en el cenit del rizo y máxima en el nadir.
a) En el cenit el piloto experimenta ingravidez. ¿Qué rapidez tiene el avión en ese punto?
b) En el nadir, la rapidez del avión es de 280 km/h. ¿Qué peso aparente tiene el piloto aquí? Su peso real es de 700 N.
Solución.
a) Sí el piloto siente ingravidez, está en caída libre, y

$a = g = \frac{v^2}{R}$, luego

$v = \sqrt{Rg} = \sqrt{(150)(9,80)} = 38,3\ \text{m/s}$, o $138\ \text{km/h}$.

b) El peso aparente es la suma de la fuerza neta hacia adentro (arriba) y el peso del piloto, o

$$P' = P + ma = P + m\frac{v^2}{R}$$

Aquí:
$P = 700$ N

$m = \frac{P}{g} = \frac{700}{9,8} = 71,43$ kg

$v = 280$ km/h = 77,6 m/s
$R = 150$ m
Luego:

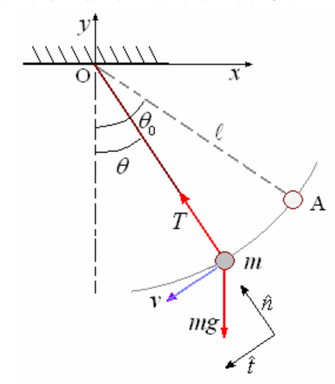
$$P' = 700 + 71,43\left(\frac{77,6^2}{150}\right) = 3579\ \text{N}$$

Ejemplo 45. Una partícula de masa *m* que está unida al extremo de un cable de longitud ℓ, cuyo otro extremo está fijo, se mueve en un plano vertical, a partir de un punto A tal que el cable forma con la vertical un ángulo θ_0, iniciando el movimiento con velocidad cero. Determinar:

a) La velocidad de *v* de la esfera en función de θ.

b) La tensión del cable en función de θ.

c) La aceleración a en función de θ.



Solución.

En la referencia de origen O, la esfera recorre una circunferencia de radio ℓ con velocidad variable *v(t)*.

Las componentes intrínsecas la aceleración son:

$$a_t = \frac{dv}{dt},\ a_n = \frac{v^2}{\ell}$$

Sobre la masa *m* actúan la tensión del cable T y su peso mg.

De la segunda ley de Newton en componentes $\hat{n}$ y $\hat{t}$ se tiene:

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow mg\text{sen}\theta = ma_t$$

$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow T - mg\cos\theta = ma_n$$

a) Para la componente tangencial se tiene:

$$mg\text{sen}\theta = m\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} = g\text{sen}\theta$$

$$\Rightarrow vdv = g\text{sen}\theta\, ds = g\text{sen}\theta\, \ell d\theta$$

Integrando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales queda

$$v^2 = 2g\ell(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

$$v = \sqrt{2g\ell(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$$

b) Para la componente normal:

$$T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{\ell} = 2mg(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

La tensión del cable es

$$T = mg(2\cos\theta_0 - 3\cos\theta)$$

c) De las ecuaciones anteriores se tiene la aceleración:

$$\vec{a} = a_t\hat{t} + a_n\hat{n}$$

$$a_t = g\text{sen}\theta,$$

$$T - mg\cos\theta = ma_n = 2mg(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow a_n = 2g(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

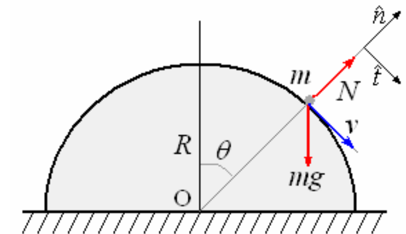
Ejemplo 46. Una partícula de masa *m* se encuentra en el polo de una semiesfera de radio *R*, la cual está apoyada sobre una superficie horizontal. Desplazada ligeramente de su posición de equilibrio, la partícula desliza sobre la superficie, la cual se supone lisa. Determinar:

a) La velocidad *v* de la partícula en función del ángulo θ que forma su radio posición con el radio inicial.

b) El valor de la normal *N* en función de θ.

c) El valor de θ, en el instante en que la partícula se despega de la superficie.

Solución.



En la referencia de origen O, la partícula *m* tiene un movimiento circular no uniforme de radio *R*. Las componentes de la aceleración son:

$$a_t = \frac{dv}{dt},\ a_n = \frac{v^2}{R}$$

Sobre la masa *m* actúan el peso mg y la reacción en el apoyo *N*.

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow mg\text{sen}\theta = ma_t$$

$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow N - mg\cos\theta = -ma_n$$

a) De la componente tangencial se tiene:

$$mg\text{sen}\theta = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} = g\text{sen}\theta$$

$$\Rightarrow vdv = g\text{sen}\theta\, ds = Rg\text{sen}\theta\, d\theta$$

Integrando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales queda

$$v^2 = 2Rg(1 - \cos\theta)$$

Finalmente:

$$v = \sqrt{2Rg(1 - \cos\theta)}$$

b) De la componente normal se tiene:

$$N = mg\cos\theta - ma_n =$$

$$mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta - 2mg(1 - \cos\theta)$$

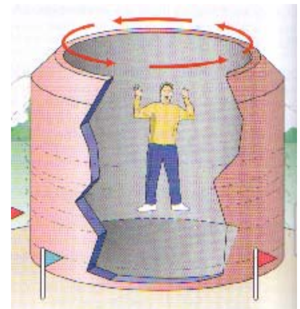
La normal es $N = mg(3\cos\theta - 2)$

c) La masa *m* deja de estar en contacto con la superficie cuando *N* = 0

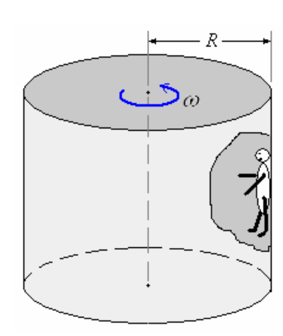
$$N = mg(3\cos\theta - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = 48{,}19^{\circ}$$

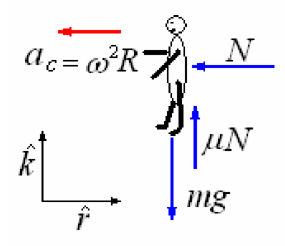
Ejemplo 47. En un parque de diversiones hay un cilindro grande vertical, de radio *R* que rota alrededor de su eje, con velocidad angular constante ω. Explicar cómo es posible que las personas que están dentro, al retirárseles el piso permanezcan "pegadas" a la pared interior del cilindro.



Solución.



La figura muestra el D.C.L del hombre.



Aplicando La segunda ley de Newton:
Como el hombre no cae, radialmente está en reposo (*R* = constante)

$$\sum F_r = ma_c \Rightarrow -N = -m\omega^2 R$$

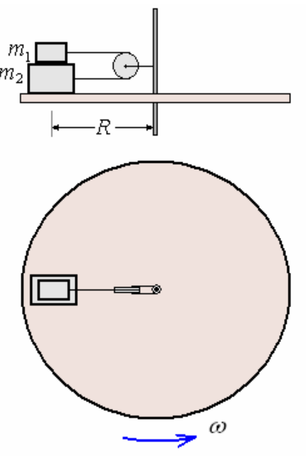
$$\sum F_z = 0 \Rightarrow mg - \mu N = 0$$

De estas ecuaciones: $mg - \mu m\omega^2 R$

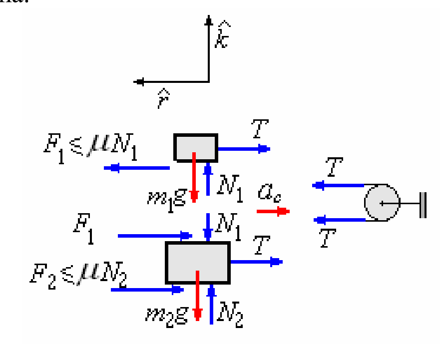
y $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\mu R}}$

Esto quiere decir que para que suceda el efecto de suspensión de las personas, la velocidad angular ω tiene que tener un valor relacionado con el radio *R* y el coeficiente de fricción μ .

Ejemplo 48. En la tornamesa mostrada en la figura el bloque de masa m_1 descansa sobre el bloque de masa m_2. Los bloques están a la distancia *R* del eje de rotación. El coeficiente de rozamiento estático entre las masas y entre m_2 y la tornamesa es μ
Considerando el rozamiento y la masa de la polea despreciables, encontrar la velocidad angular de la tornamesa para la cual los bloques justamente comienzan a resbalar.



Solución.
En este problema todo depende de tomar correctamente la dirección de la fuerza de fricción entre m_1 y m_2. Consideremos $m_2 > m_1$, por lo tanto m_2 tenderá a moverse hacia afuera, jalando a m_1 hacia adentro. La fuerza de fricción actuará en oposición a su movimiento relativo.
La figura muestra los D.C.L. de los componentes del sistema.



Aplicando la segunda Ley de Newton

$$\sum F_z = ma_z, \ \sum F_r = ma_r \ \text{y} \ \sum F_t = ma_t$$

A la masa m_1:

$$N_1 - m_1 g = 0, \ -T + F_1 = -m_1\omega^2 R, \ F_t = 0$$

A la masa m_2:

$$N_2 - N_1 - m_2 g = 0,$$

$$-T - F_1 - F_2 = -m_2\omega^2 R, \ F_t = 0$$

De las ecuaciones obtenemos:

$$N_1 = m_1, \ N_2 = (m_1 + m_2)g$$

$$F_1 \leq \mu m_1 g, \ F_2 \leq \mu(m_1 + m_2)g$$

y $2F_1 + F_2 = (m_2 - m_1)\omega^2 R$

Corno ω puede incrementarse hasta que F_1 y F_2 alcancen sus valores máximos

$$2\mu m_1 g + \mu(m_1 + m_2)g = (m_2 - m_1)\omega^2 R$$

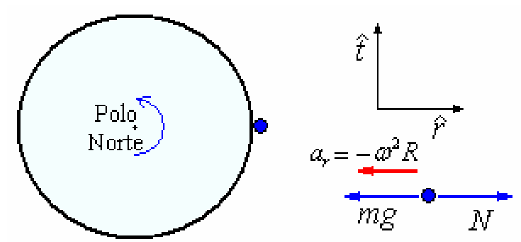
Finalmente

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu(3m_1 + m_2)}{R(m_2 - m_1)}}$$

Ejemplo 49. ¿Cómo afectará la rotación de la tierra al peso aparente de un cuerpo en el ecuador?

Solución.

La figura muestra la situación de un cuerpo situado en la línea ecuatorial



Aplicando la segunda ley de Newton

$$\sum F_z = ma_z \Rightarrow F_z = 0$$

$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow N - mg = -m\omega^2 R$$

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow F_t = 0$$

El peso de la masa es representado por la reacción *N*

$$N = mg - m\omega^2 R$$

Para tener una idea de cuánto afecta la rotación de la tierra es necesario hacer el cálculo numérico para esta consideración:

El radio de la tierra en el ecuador: $R = 6{,}378 \times 10^6$m

La velocidad angular de la tierra

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600}\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 7{,}27 \times 10^{-5}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

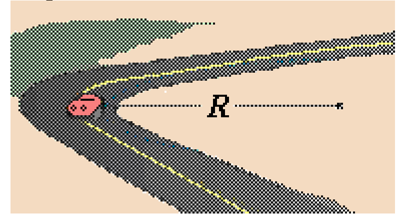
La aceleración de la gravedad en el Ecuador: $g = 9{,}780490$ m/s^2

$$\text{Porcentaje} = \frac{\omega^2 R}{g} \times 100 = 0{,}34\%$$

CURVAS EN LAS PISTAS.

Para un cuerpo como un vehículo o un vagón de tren que se mueven describiendo una trayectoria curva de radio *r*, sobre el vehículo debe actuar una fuerza centrípeta para evitar que continúe moviéndose en línea recta y se salga de la pista; esta es la fuerza para hacer que el vehículo gire por la pista curva.

La fuerza centrípeta necesaria la da el roce de las llantas o las pestañas de las ruedas del tren.



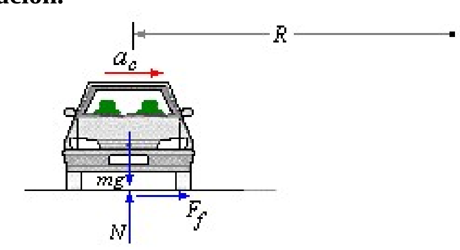
Curvas sin peraltar

En estos casos la fuerza de rozamiento es la que nos proporciona toda la componente normal que servirá para tomar la curva. Siempre que tengamos que ésta es mayor que la aceleración normal el automóvil será capaz de tomar la curva, es decir, el caso límite se alcanza cuando

$$F_r = ma_c = m\frac{v^2}{R}$$

Ejemplo 50. ¿Cuál es la velocidad a que puede ir un automóvil por una curva sin peralte, de radio *R*, sin derrapar?, el coeficiente de rozamiento entre las ruedas y el suelo vale μ.

Solución.



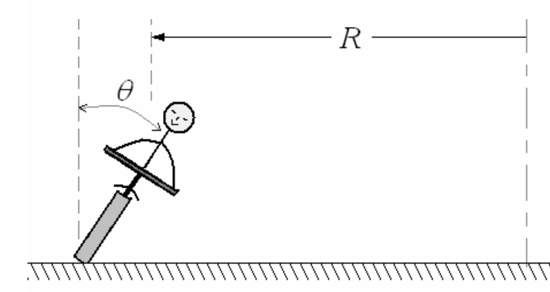
$$\sum F_h = ma_c \quad \sum F_V = 0 \quad a_c = \frac{v^2}{R}$$

$$F_f = \mu N = \mu mg = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\mu g R}$$

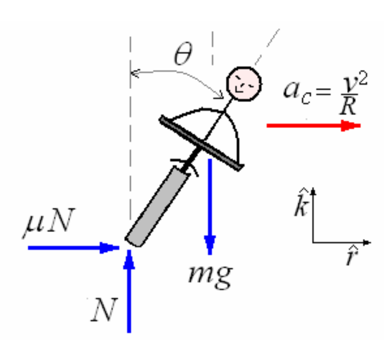
Ejemplo 51. El ciclista tiene que inclinarse al desplazarse por una pista circular (o para pasar por una curva), Encontrar la relación de la velocidad con el radio de curvatura, el ángulo de inclinación y μ coeficiente de fricción.



Solución.



La figura muestra el D.C.L.



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_z = ma_z \Rightarrow N - mg = 0$$

$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow \mu N = m\frac{v^2}{R}$$

De las ecuaciones obtenemos

$$N = mg \text{ y } \mu mg = m\frac{v^2}{R}$$

Finalmente $v = \sqrt{\mu g R}$

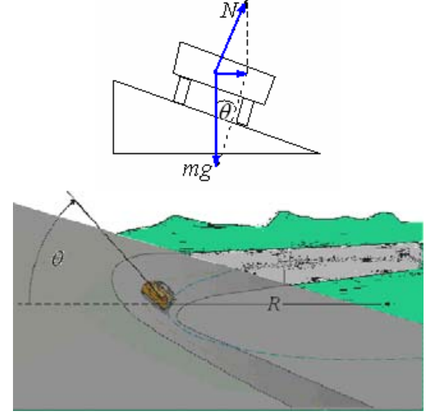
Del D.C.L. también obtenemos:

$$\tan\theta = \frac{\mu N}{N} = \mu$$

Esto quiere decir que si el motociclista al realizar una curva no se reclina y el piso no es lo suficientemente áspero (fricción), éste caerá.

Curvas peraltadas sin rozamiento

Para no tener que confiar en el roce o reducir el desgaste de los rieles y pestañas, la carretera o la vía pueden inclinarse, como en la figura. En este caso la componente de la normal dirigida hacia el centro de curvatura proporciona la fuerza necesaria para mantener al móvil en la pista. A la inclinación de la pista o vía se le llama ángulo de **peralte,** θ**.**



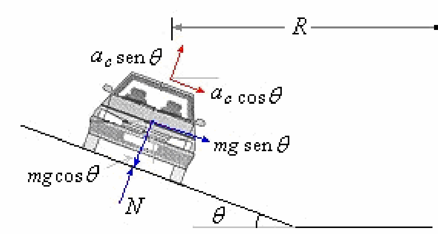
En estos casos se toma la proyección de la normal sobre la horizontal como causante de la fuerza centrípeta. Este caso se tiene, que:

$$\tan\theta = \frac{m\frac{v^2}{R}}{mg} = \frac{v^2}{Rg}$$

Siendo θ, la inclinación de la carretera**.**

Ejemplo 52. ¿Cuál es la velocidad a que puede ir un automóvil por una curva con peralte, de radio *R,* sin derrapar, el peralte es de θ grados?

Solución.



$$\sum F_\perp = 0 \quad a_c = \frac{v^2}{R}$$

$$\sum F_{//} = ma_c \cos\theta \Rightarrow mg\,\text{sen}\,\theta = m\frac{v^2}{R}$$

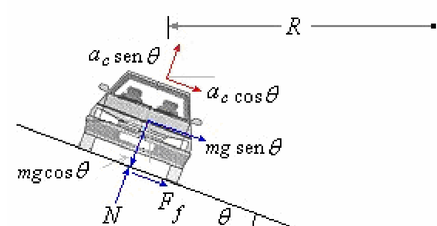
$$\Rightarrow v = \sqrt{gR\tan\theta}$$

Curvas peraltadas con rozamiento

Este es un caso bastante más complejo de analizar.

Ejemplo 53. ¿Cuál es la velocidad a la que puede ir un automóvil por una curva con peralte, de radio *R,* para que no se deslice hacia el exterior, el coeficiente de rozamiento entre las ruedas y el suelo vale μ., el peralte es de θ grados?

Solución.



$$F_f = \mu N, \quad a_c = \frac{v^2}{R}$$

$$\sum F_{//} = ma_c \cos\theta$$

$$\Rightarrow mg\,\text{sen}\,\theta + \mu N = m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

$$\sum F_\perp = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}\text{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow N = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}\text{sen}\,\theta$$

$$mg\,\text{sen}\,\theta + \mu\left(mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}\text{sen}\,\theta\right) = m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

$$mg\,\text{sen}\,\theta + \mu mg\cos\theta + \mu m\frac{v^2}{R}\text{sen}\,\theta = m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

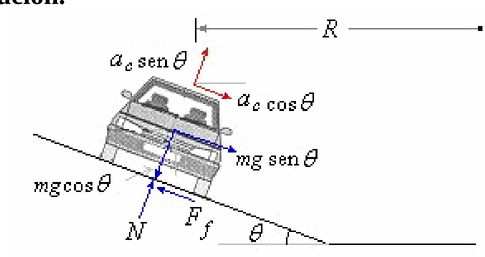
$$mg(\text{sen}\,\theta + \mu\cos\theta) = m\frac{v^2}{R}(\cos\theta - \mu\,\text{sen}\,\theta)$$

$$v = \sqrt{gR\frac{(\text{sen}\,\theta + \mu\cos\theta)}{(\cos\theta - \mu\,\text{sen}\,\theta)}}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{gR\frac{(\tan\theta + \mu)}{(1 - \mu\tan\theta)}}$$ Para que no se vaya

Ejemplo 54. ¿Cuál es la velocidad a laque puede ir un automóvil por una curva con peralte, de radio *R*, para que no se deslice hacia el interior, el coeficiente de rozamiento entre las ruedas y el suelo vale μ., el peralte es de θ grados?

Solución.



$$F_f = \mu N\ ,\ a_c = \frac{v^2}{R}$$

$$\sum F_{//} = ma_c\cos\theta \Rightarrow$$

$$mg\text{sen}\theta - \mu N = m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

$$\sum F_{\perp} = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}\text{sen}\theta$$

$$\Rightarrow N = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}sen\theta$$

$$mg\text{sen}\theta - \mu\left(mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}\text{sen}\theta\right) = m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

$$mg\text{sen}\theta - \mu mg\cos\theta - \mu m\frac{v^2}{R}\text{sen}\theta = m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

$$mg(\text{sen}\theta - \mu\cos\theta) = m\frac{v^2}{R}(\cos\theta + \mu\text{sen}\theta)$$

$$v = \sqrt{gR\frac{(\text{sen}\theta - \mu\cos\theta)}{(\cos\theta + \mu\text{sen}\theta)}}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{gR\frac{(\tan\theta - \mu)}{(1 + \mu\tan\theta)}}$$ Para que no se caiga

La velocidad debe de estar entre esos valores para permanecer en la carretera.

$$\sqrt{gR\frac{(\tan\theta + \mu)}{(1 - \mu\tan\theta)}} \geq v \geq \sqrt{gR\frac{(\tan\theta - \mu)}{(1 + \mu\tan\theta)}}$$

MOVIMIENTO EN MARCOS DE REFERENCIA NO INERCIALES

Hasta este momento nuestro estudio de mecánica clásica lo hemos realizado en sistemas de referencia que están en reposo o con movimiento con velocidad constante con respecto a un sistema considerado en reposo. A este conjunto de marcos de referencia se le conoce como MARCOS DE REFERENCIA INERCIALES.

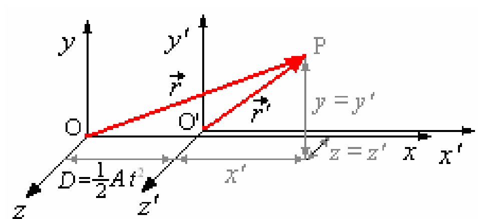
En los problemas trabajados hasta esta parte el primer paso era dibujar un sistema de coordenadas. Elegimos un sistema fijo a tierra, pero no pusimos atención al hecho que la tierra no es un marco inercial debido a que la tierra al viajar en su orbita casi circular alrededor del sol experimenta una aceleración centrípeta hacia el centro de la tierra. Sin embargo, estas aceleraciones son pequeñas comparadas con la aceleración de la gravedad y a menudo se pueden despreciar. En la mayoría de los casos se supondrá que la tierra es un marco inercial.

Ahora veremos cómo cambian los resultados cuando se trabaja en un MARCO DE REFERENCIA NO INERCIAL, que es el nombre que se da a un marco de referencia acelerado.

MARCO CON MOVIMIENTO DE TRASLACION NO UNIFORME.

Consideremos los sistemas S y S' tal corno se muestra en la Figura siguiente. El sistema S es inercial y el sistema S' se mueve con respecto a S con aceleración constante $\vec{A} = A\hat{i}$, tal que

$$D = \frac{1}{2}At^2.$$



De la figura obtenemos que la posición de la partícula P es:

$$x = x' + \frac{1}{2}At^2,\ y = y',\ z = z'$$

$$\vec{r} = \vec{r}' + \frac{1}{2}At^2\hat{i}$$

Derivando con respecto al tiempo encontramos

$$v_x = v'_{x'} + At,\ v_y = v'_{y'},\ v_z = v'_{z'}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + At\hat{i}$$

Derivando nuevamente encontramos

$$a_x = a'_x + A,\ a_y = a'_{y'},\ a_z = a'_{z'}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + A\hat{i}\ \text{ o }\ \vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}$$

Si la partícula P tiene una masa *m* y aplicarnos la segunda ley de Newton del movimiento en el sistema inercial S obtenemos

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Donde P es la suma de todas las fuerzas de interacción que actúan sobre las partículas.

Para relacionar con el sistema no inercial S'

$$\vec{F} = m\left(\vec{a}' + A\hat{i}\right) \text{ o } m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A}$$

Aquí vemos que para que el observador según S' pueda aplicar la segunda ley de Newton debemos introducir una fuerza extra $\vec{F}_A$ a la llamaremos **fuerza de arrastre** y debemos incluirla en los diagramas de fuerzas:

$$\vec{F}_A = -m\vec{A}$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_A$$

De este modo, en el sistema S':

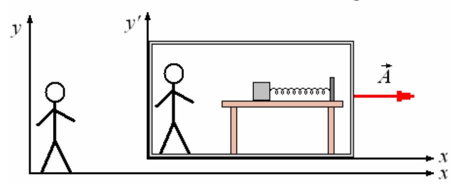
Donde $\vec{F}'$ es la suma de las fuerzas reales más la de arrastre

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_A$$

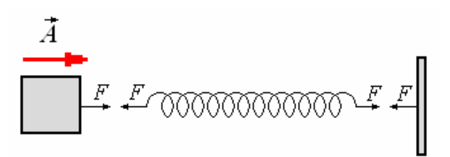
Recalquemos el carácter ficticio de $\vec{F}_A$. Para aplicar una fuerza real sobre un cuerpo debemos ponerlo en interacción con otro, de manera que, según la tercera ley de Newton, si A ejerce una fuerza sobre B, $\vec{F}_{AB}$, a su vez B ejercerá una fuerza sobre A, $\vec{F}_{BA}$, tal que $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$.

Ahora, ¿es la reacción de la fuerza de arrastre?, ¿cuál es el otro cuerpo que está ejerciendo la fuerza ?. No existe tal cuerpo, la fuerza no tiene reacción, es una fuerza ficticia que agrega un observador ubicado en un sistema acelerado (respecto a uno inercial) para justificar los fenómenos que observa.

Ejemplo 55. La fuerza para estirar o comprimir un resorte es proporcional a su deformación lineal, $F = -k\Delta\ell$, donde k es la constante del resorte y el signo menos significa que la fuerza es en oposición a la deformación. Si sobre una mesa sin fricción que se encuentra en un vagón se coloca una masa. m sujeta a un resorte de constante k y largo ℓ, como se muestra en la figura. El tren arranca con una aceleración A que se mantiene constante en la dirección x. Calcular la deformación del resorte desde el punto de vista del observador en tierra y desde el punto de vista del observador en el vagón.



Solución.
Observador en tierra:
La figura muestra el D. C. L. de la masa m.



El observador ve que el resorte se estira $\Delta\ell$. La fuerza es

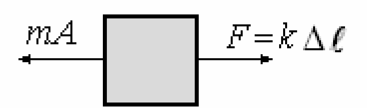
$F = k\Delta\ell$

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow k\Delta\ell = mA$$

$$\Rightarrow \Delta\ell = \frac{mA}{F}$$

Observador en el vagón:
La figura a continuación muestra el D.C.L. de la masa m que no se mueve para el observador en el vagón. Como es sistema no inercial tenemos que aplicar la fuerza ficticia $-mA$.



Aplicando la segunda ley de Newton

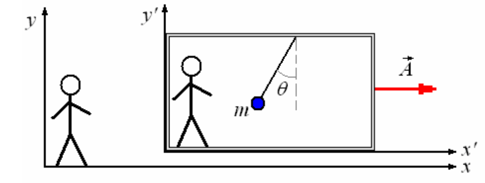
$$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow -mA = k\Delta\ell$$

$$\Rightarrow \Delta\ell = \frac{mA}{F}$$

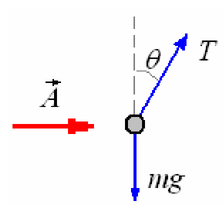
Ejemplo 56. Analizar el caso de masa m colgada mediante un hilo del techo de un vagón, que se mueve con una aceleración A.

a) Desde el punto de vista de un observador en tierra (S).

b) para un observador dentro del vagón (S').



Solución.
a) Para un observador en S:
El D.C.L. de la masa m



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow T\text{sen}\,\theta = mA \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T\cos\theta - mg = 0$$

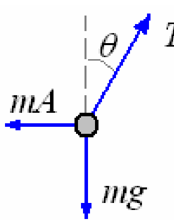
$$\Rightarrow T\cos\theta = mg \quad (2)$$

Dividiendo (1) : (2)

$\tan\theta = \frac{A}{g}$

b) Para un observador en S'

El D.C.L..de la masa *m*



Aplicando la segunda ley de Newton

$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow T\text{sen}\theta - mA = 0$

$\Rightarrow T\text{sen}\theta = mA = 0 \quad (1)$

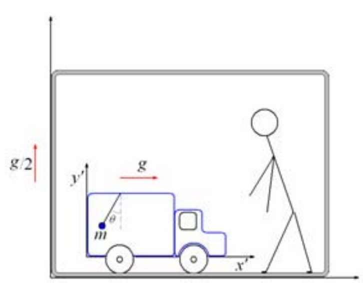
$\sum F_{y'} = 0 \Rightarrow T\cos\theta - mg = 0$

$\Rightarrow T\cos\theta = mg \quad (2)$

Dividiendo (1) : (2) obtenemos:

$\tan\theta = \frac{A}{g}$

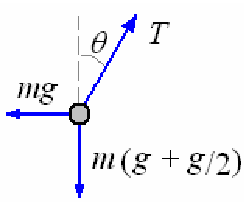
Ejemplo 57. Desde el techo de un carrito de juguete cuelga una masa *m* unida al cielorraso mediante una cuerda ideal. El carrito se encuentra en el piso de un ascensor que sube con aceleración *g*/2. A su vez el carrito tiene una aceleración horizontal de magnitud *g* respecto al ascensor. Encuentre el ángulo que forma la cuerda con la vertical, resuelva para un observador situado dentro del ascensor.



Solución.

Para un observador en el ascensor.

El D.C.L..de la masa *m*



Aplicando la segunda ley de Newton

$\sum F_{x'} = ma_{x'}$

$\Rightarrow T\text{sen}\theta = mg \quad (1)$

$\sum F_{y'} = 0 \Rightarrow T\cos\theta - m\left(g + \frac{g}{2}\right) = 0$

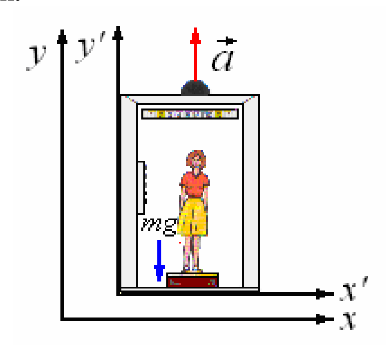
$\Rightarrow T\cos\theta = m\frac{3}{2}g \quad (2)$

Dividiendo (1) / (2)

$\tan\theta = \frac{g}{\frac{3}{2}g} = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = 33{,}7°$

Ejemplo 58. Resolver el caso del peso del hombre en un ascensor cuando asciende con una aceleración constante *A*, desde el punto de vista del hombre en el ascensor.

Solución.



Aplicamos la segunda ley de Newton,

$\sum F_{y'} = ma_{y'} \Rightarrow N - mg - ma = 0$

$\Rightarrow N = m(g + a)$

El peso del hombre será la reacción *N*

En caso de subir con aceleración *a*:

$N = m(g + a)$

En caso de bajar con aceleración a:

$N = m(g - a)$

Ejemplo 59. El pasajero de un tren deja caer una piedra en diversos estados de movimiento del tren. Hallar la trayectoria de dicha piedra que ve el pasajero y la trayectoria vista por un observador en tierra.

a) El tren acelera con aceleración *A* constante.

b) El tren frena con aceleración *A* constante.

Solución.

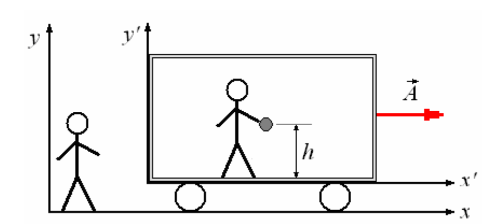
El tiempo en que la piedra esta en movimiento, es el mismo para todo sistema puesto que el movimiento vertical es independiente del horizontal.

$y = y' = h - \frac{1}{2}gt^2$, para $y = 0$ la piedra lega al piso:

$h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

a) Cuando el tren va con aceleración *A*, deja caer una piedra.

Considerando que en el momento que suelta la piedra el tren tiene una velocidad v_0.



Observador en tierra
Las ecuaciones del movimiento en el sistema S.
Movimiento de la piedra

$x_{piedra} = v_0 t$

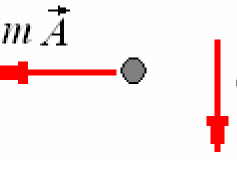
Movimiento del tren

$x_{tren} = v_0 t + \frac{1}{2} A t^2$

La piedra cae a una distancia

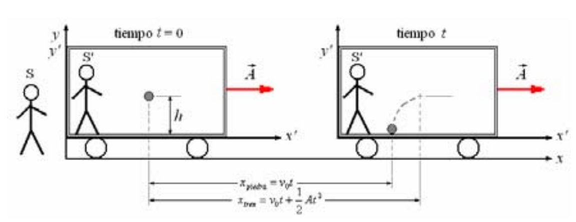
$\Delta x = x_{tren} - x_{piedra} = \frac{1}{2} A t^2$, detrás del punto de plomada.

Observador en el tren
La ecuación del movimiento en el sistema S'
Movimiento de la piedra

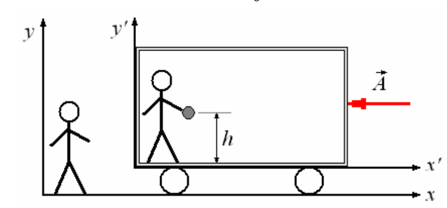


$x_{piedra} = -\frac{1}{2} A t^2$

La piedra cae a una distancia $\Delta x = \frac{1}{2} A t^2$, detrás del punto de plomada.
El gráfico siguiente muestra el moviendo visto por un observador en el sistema S y en el sistema S'.



b) Cuando el tren desacelera con aceleración *A*, deja caer una piedra.
Considerando que en el momento que suelta la piedra el tren tiene una velocidad v_0.



Observador en tierra
Las ecuaciones del movimiento en el sistema S.
Movimiento de la piedra

$x_{piedra} = v_0 t$

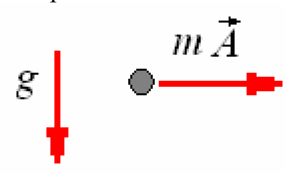
Movimiento del tren

$x_{tren} = v_0 t - \frac{1}{2} A t^2$

La piedra cae a una distancia

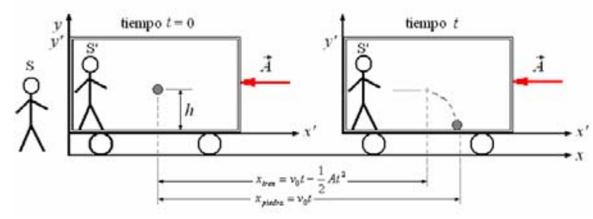
$\Delta x = x_{tren} - x_{piedra} = \frac{1}{2} A t^2$, detrás del punto de plomada.

Observador en el tren
La ecuación del movimiento en el sistema S'
Movimiento de la piedra

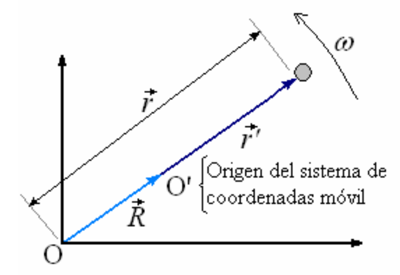


$x_{piedra} = \frac{1}{2} A t^2$

La piedra cae a una distancia $\Delta x = \frac{1}{2} A t^2$, detrás del punto de plomada.
El gráfico siguiente muestra el moviendo visto por un observador en el sistema S y en el sistema S'.



MARCO DE ROTACIÓN
Veamos el caso de un marco de referencia que está rotando con velocidad angular ω con respecto a otro marco de referencia. Supongamos que tenemos un objeto moviéndose alrededor de un punto arbitrario; este es un caso específico, sin embargo tiene todos los efectos en él.
La posición de la partícula con respecto a un sistema inercial está determinada por un vector $\vec{r}$.
Consideremos un nuevo sistema de coordenadas tal que siga al objeto, el nuevo origen está determinado por $\vec{R}$ contenido en $\vec{r}$ tal que la posición de la partícula en este nuevo sistema está ciada por $\vec{r}'$.



De la figura tenemos.

$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' = R\hat{r} + r'\hat{r} = (R + r')\hat{r}$

Derivando:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(R+r')\hat{r} = \frac{d(R+r')}{dt}\hat{r} + (R+r')\frac{d\hat{r}}{dt}$$

Como $\frac{d\hat{r}}{dt} = \omega\hat{t}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dR}{dt}\hat{r} + \frac{dr'}{dt}\hat{r} + (R+r')\omega\hat{t}$$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ es la velocidad de la partícula vista en el sistema inercial y $\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}'$ es la velocidad de la partícula vista en el sistema no inercial.

Tal que

$$\vec{v} = \frac{dR}{dt}\hat{r} + \vec{v}' + (R+r')\omega\hat{t}$$

Para encontrar la aceleración es necesario derivar nuevamente:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(R+r')\hat{r} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d(R+r')}{dt}r + (R+r')\omega\hat{t}\right]$$

Como $\frac{d\hat{r}}{dt} = \omega\hat{t}$ y $\frac{d\hat{t}}{dt} = -\omega\hat{r}$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2(R+r')}{dt^2}\hat{r} + \frac{d(R+r')}{dt}\omega\hat{t} + \frac{d(R+r')}{dt}\omega\hat{t} + (R+r')\frac{d\omega}{dt}\hat{t} - (R+r')\omega^2\hat{r}$$

$$= \frac{d^2(R+r')}{dt^2}\hat{r} + 2\frac{d(R+r')}{dt}\omega\hat{t} + (R+r')\alpha\hat{t} - (R+r')\omega^2\hat{r}$$

$$= \left[\frac{d^2(R+r')}{dt^2} - (R+r')\omega^2\right]\hat{r} + 2\left[\frac{d(R+r')}{dt}\omega + (R+r')\alpha\right]\hat{t}$$

donde $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ es la aceleración de la partícula vista en el sistema inercial y

$\vec{a}' = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$ es la aceleración de la partícula vista en el sistema no inercial.

Llamando a

$$\vec{A}_r = \left[\frac{d^2(R+r')}{dt^2} - (R+r')\omega^2\right]\hat{r}$$

y $\vec{A}_t = 2\left[\frac{d(R+r')}{dt}\omega + (R+r')\alpha\right]\hat{t}$

Tenemos: $\vec{A} = A_r\hat{r} + A_t\hat{t}$

Tal que: $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}$

Si la partícula tiene una masa m y aplicamos la segunda ley de Newton en el sistema inercial

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

donde $\vec{F}$ es la suma de todas las fuerzas de interacción que actúan sobre la partícula.

Para relacionar con el sistema inercia!

$\vec{F} = m\left(\vec{a}' + \vec{A}\right)$ o $m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A}$

Para que el observador pueda aplicar la segunda ley de Newton debemos introducir aquí también una fuerza extra $\vec{F}_A$ y debemos incluirla en los diagramas de fuerzas

$$\vec{F}_A = -m\vec{A}$$

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{Ar}\hat{r} + \vec{F}_{At}\hat{t}$$

$$\frac{d^2(R+r')}{dt^2}\hat{r} + \frac{d(R+r')}{dt}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{d(R+r')}{dt}\omega\hat{t} + (R+r')\frac{d\omega}{dt}\hat{t} + (R+r')\omega\frac{d\hat{t}}{dt}$$

$$\vec{F}_{Ar} = -m\left[\frac{d^2(R+r')}{dt^2} - (R+r')\omega^2\right]\hat{r}$$

y $\vec{F}_{At} = 2m\left[\frac{d(R+r')}{dt}\omega + (R+r')\alpha\right]\hat{t}$

De este modo, en el sistema no inercial

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_A$$

Recalquemos el carácter ficticio de $\vec{F}_A$ Con el objeto de clarificar esta idea veamos dos casos especiales:

a) El origen O' rota con velocidad angular constante ω a una distancia constante b, tal

$R + r' = b$, R y r' son constantes.

$$\frac{d(R+r')}{dt} = 0 \text{ y } \frac{d^2(R+r')}{dt^2} = 0$$

ω = constante, $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0$

Sólo nos queda

$$\vec{F}_{Ar} = m(R+r')\omega^2\hat{r} = mb\omega^2\hat{r}$$

Que es la fuerza ficticia del centro hacia afuera y se le da el nombre de FUERZA CENTRÍFUGA, debemos insistir que solo aparece en el marco no inercial.

b) El origen O' rota con velocidad angular constante ω y también se está alejando del origen fijo en O con una velocidad constante $V = \frac{d(R+r')}{dt}$.

Con esto, $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0$

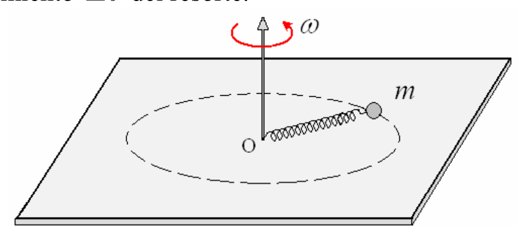
y nos queda

$$\vec{F}_{Ar} = m(R+r')\omega^2\hat{r}$$

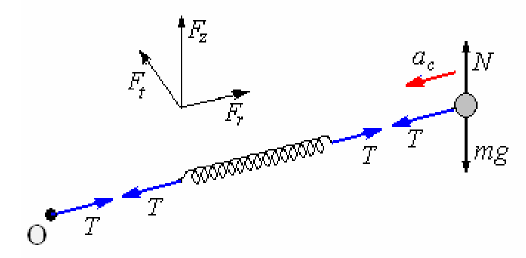
y $\vec{F}_{At} = -2mV\omega\hat{t}$

Esta última fuerza ficticia, cuya dirección es transversal, se conoce como FUERZA DE CORIOLIS.

Ejemplo 60. Un cuerpo de masa de masa m unido a un resorte de constante k y longitud ℓ que gira con ve1ocidad angular ω constante en un plano horizontal sin fricción. Se quiere calcular el estiramiento $\Delta\ell$ del resorte.



Solución.
Visto por el observador inercial.
La figura muestra el D.C. L. de la masa



Aplicando la segunda ley de Newton, el resorte estira $\Delta\ell$, luego su longitud es $(\ell + \Delta\ell)$

$\sum F_z = ma_z$, $\sum F_r = ma_r$, $\sum F_t = ma_t$

Como: $a_z = 0$, $a_r = -\omega^2(\ell + \Delta\ell)$, $a_t = 0$

Tenemos

$N - mg = 0$, $-T = -m\omega^2(\ell + \Delta\ell)$, $F_t = 0$

De aquí obtenemos:

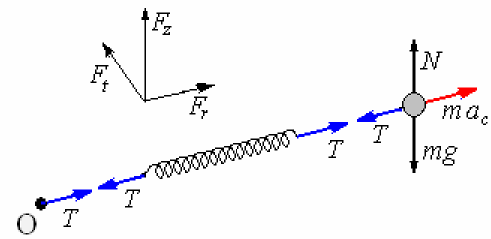
$N = mg$ y $T = m\omega^2(\ell + \Delta\ell)$

Como $T = k\Delta\ell$

$k\Delta\ell = m\omega^2(\ell + \Delta\ell)$

y $\Delta\ell = \dfrac{m\omega^2\ell}{k - m\omega^2}$

Visto por un observador no inercial colocado en el centro de rotación y girando con la misma velocidad angular.



Aplicando la segunda ley de Newton:

$\sum F'_{z'} = ma'_{z'}$, $\sum F'_{r'} = ma'_{r'}$,
$\sum F'_{t'} = ma'_{t'}$

Como $a'_{z'} = 0$, $a'_{r'} = 0$, $\sum F'_{t'} = ma'_{t'}$

Tenemos

$N - mg = 0$, $-T + m\omega^2(\ell + \Delta\ell) = 0$, $F_t = 0$

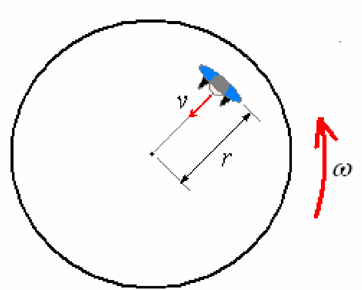
Como $T = k\Delta\ell$

$-k\Delta\ell + m\omega^2(\ell + \Delta\ell) = 0$

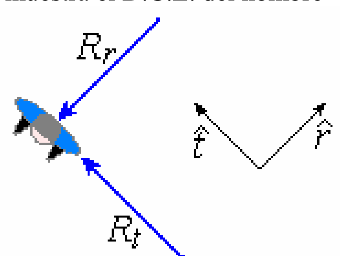
y $\Delta\ell = \dfrac{m\omega^2\ell}{k - m\omega^2}$

Visto por un observador no inercial colocado sobre la misma masa Este caso es idéntico al caso anterior.

Ejemplo 61. Se tiene una plataforma circular de radio R a la cual se le ha pintado un radio y gira con velocidad angular constante ω. Un hombre camina de afuera hacia adentro de la plataforma siguiendo la línea con una velocidad de módulo constante v. ¿Cuál es la fuerza que la plataforma ejerce sobre el hombre, en función de su posición?



Solución.
La figura muestra el D.C.L. del hombre



Aplicando la segunda ley de Newton:

$\sum F_r = ma_r \Rightarrow -R_r = ma_r - mr\omega^2$

$\sum F_t = ma_t \Rightarrow R_t = m(-2v\omega + \alpha r)$

Como: $a_r = 0$ y $\alpha = 0$:

$R_r = mr\omega^2$ y $R_t = -2mv\omega$

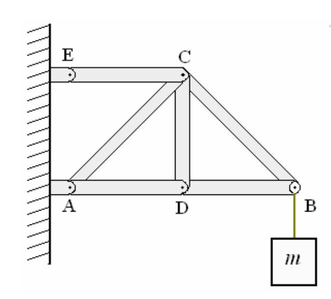
R_t es debido a la aceleración de coriolis.

R_r es el sentido indicado en la figura y R_t en el sentido contrario.

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

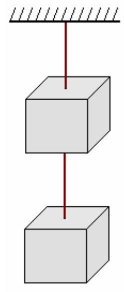
1. Sobre una partícula de masa m que parte del reposo en origen de coordenadas. actúa una fuerza $\vec{F} = \left(2\hat{i} + 3\hat{j}\right)$ Después de l0s la posición de la partícula viene dada por las coordenadas (3m; 4,5 m). ¿Cuál es su masa?
Respuesta. m = 33,3 kg.

2 Hallar las fuerzas que actúan sobre cada una de las seis barras rígidas de peso despreciable. Si están unidas mediante pivotes lisos y cada una de las barras cortas tiene una longitud ℓ .



Respuesta. AD = DB = mg ; CB = CA = mg/2, BC = 2mg; CD = 0.
CD se puede retirar y no pasa nada.

3. Dos cubos de masa m están unidos mediante una cuerda y uno de ellos está sujeto al techo mediante otra cuerda igual.
a) Si en el cubo inferior se hace presión suavemente hacia abajo. ¿Cuál de las cuerdas se romperá antes? ¿porqué?
b) Si la masa interior se golpea hacia abajo con un martillo, se rompe la cuerda de abajo ¿porqué?

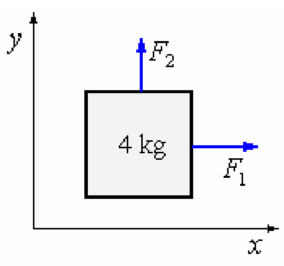


Respuesta. a) La cuerda superior debido a que la tensión es mayor.
b) La tuerza de reacción inercial de la masa superior aumenta la resistencia frente a una aceleración rápida.

4. Una caja de 40 kg que está resbalando en el piso disminuye su velocidad de 5 m/s a 2 m/s. Asumiendo que la fuerza sobre la caja es constante, encontrar su magnitud y dirección relativa a la velocidad de la caja.

Respuesta. 20N opuesta a la velocidad.

5. ¿Qué fuerza en adición a $\vec{F}_1 = 4\hat{i}$ N y $\vec{F}_2 = 2\hat{j}$ N debe aplicarse al cuerpo en la figura, tal que:
a) no acelere?
b) tenga una aceleración $-4\hat{i}$ m/s^2



Respuesta. a) $\vec{F} = \left(-4\hat{i} - 2\hat{j}\right)$ N, b) $\vec{F} = \left(-16\hat{i} - 2\hat{j}\right)$ N

6. ¿Cuál es la mínima aceleración con la que puede deslizarse hacia abajo un hombre de 75 kg por una cuerda que solo soporta una tensión de 490N, ¿Cuál será la velocidad de la persona después de deslizarse la distancia de 20m?
Respuesta. a = 3,27 m/s^2 ; v = 11,4 m/s

7. El libro de Física I, está apoyado en el extremo superior de un resorte vertical, que a su vez esta 'parado' sobre una mesa. Para cada componente del sistema libro-resorte-mesa-tierra:
a) dibujar el diagrama de cuerpo libre,
b) identificar todos los pares de fuerzas de acción y reacción.

8. De acuerdo con la leyenda, un caballo aprendió las leyes de Newton. Cuando se le dijo que tirara una carreta, se negó argumentando que si él tiraba la carreta hacia delante, de acuerdo con la tercera ley de Newton habría una fuerza igual hacia atrás. De esta manera, las fuerzas estarían balanceadas y de acuerdo con la segunda ley de Newton, la carreta no aceleraría. ¿Cómo podría usted razonar con este misterioso caballo?

9. Dos alumnos de forestal ubicados en los bordes opuestos de un camino recto tiran a un carro por el camino, con fuerzas de 160 N y 200 N, que forman un ángulo de 30º y 60º respectivamente, con la dirección del camino.
Calcular la magnitud de la fuerza resultante y la dirección en la que se moverá el carro.
Respuesta. 256,1N, -21,3º

10. Una masa de 5kg cuelga de una cuerda de 1m de longitud que se encuentra sujeta a un techo. Calcular la fuerza horizontal que aplicada a la masa la desvíe 30 cm de la vertical y la mantenga en esa posición.
Respuesta. 15,7 N.

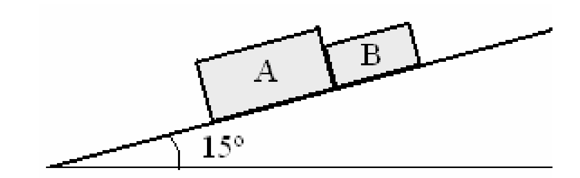
11. Tres fuerzas $\vec{F}_1 = \left(-2\hat{i} + 2\hat{j}\right)$N, $\vec{F}_2 = \left(5\hat{i} - 3\hat{j}\right)$N y $\vec{F}_3 = \left(-45\hat{i}\right)$N que actúan sobre un objeto le producen una aceleración de valor 3 m/s^2.
a) ¿Cuál es la dirección de la aceleración?
b) ¿Cuál es la masa del objeto?
c) Si el objeto esta inicialmente en reposo, calcular su velocidad después de 10s?

12. Una mano ejerce una fuerza horizontal de 5 N para mover hacia la derecha a dos bloques en contacto entre sí uno al lado del otro, sobre una superficie horizontal sin roce. El bloque de la izquierda tiene una masa de 2 kg y el de la derecha de 1 kg.
a) Dibujar el diagrama de cuerpo libre para cada bloque.
b) Calcular la aceleración del sistema,
c) Calcular la aceleración y fuerza sobre el bloque de 1 kg,
d) Calcular la fuerza neta actuando sobre cada cuerpo.
Respuesta. b) 5/3 m/s^2, c) 5/3 m/s^2, 5N, d) 5 N.

13. Una fuerza *F* aplicada a un objeto de masa m_1 produce una aceleración de 3 m/s^2. La misma fuerza aplicada a una masa m_2 produce una aceleración 1 m/s^2.
a) ¿Cuál es el valor de la proporción m_1/m_2?
b) Si se combinan m_1 y m_2, encuentre su aceleración bajo la acción de ***F***.
Respuesta. a) 1/3, b) 0,75 m/s^2.

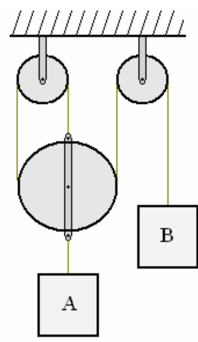
14. Dos bloques de masas *M* y *3M* ubicado a la derecha de *M*, que están sobre una mesa horizontal lisa se unen entre sí con una varilla de alambre horizontal, de masa despreciable. Una fuerza horizontal de magnitud 2*Mg* se aplica sobre *M* hacia la izquierda.
a) Hacer los diagrama de cuerpo libre.
b) Calcular la aceleración del sistema.
c) Calcular la tensión del alambre.
Respuesta. b) 5 m/s^2, c) 15*Mg* N.

15. Dos paquetes se colocan sobre un plano inclinado como muestra la figura. El coeficiente de rozamiento entre el plano y el paquete A es 0,25 y entre el plano y el paquete B es 0,15. Sabiendo que los paquetes están en contacto cuando se dejan libres, determinar:
a) la aceleración de cada paquete,
b) la fuerza ejercida por el paquete A sobre el B.
c) Resolver el problema invirtiendo las posiciones de los paquetes.



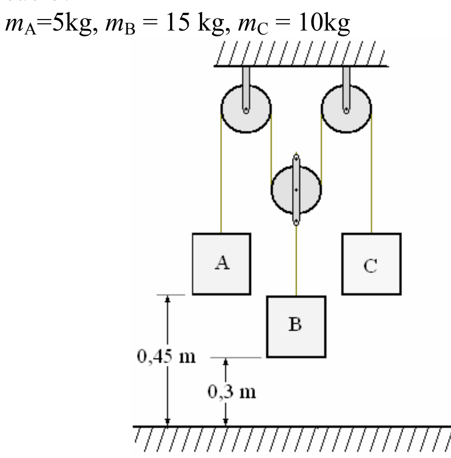
Respuesta: a) $a_A = a_B = 0,738$ m/s^2, b) 5,68 N

16. Un bloque A de 100 kg está unido a un contrapeo 8 de 25 kg mediante un cable dispuesto como muestra la figura. Si el sistema se abandona en reposo, determinar:
a) la tensión en el cable.
b) la velocidad de B transcurridos 3 s,
c) la velocidad de A cuando ha recorrido 1,2 m.



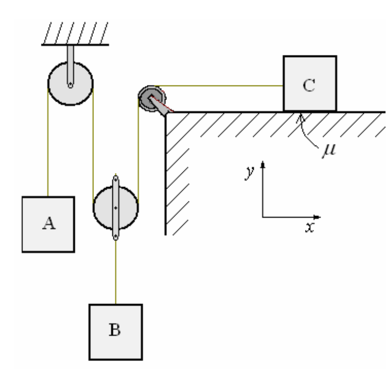
Respuesta. a) 302 N, b) 6,79 $\hat{j}$ m/s, c) -1,346 $\hat{j}$ m/s

17. Determinar la aceleración de cada uno de los bloques de la figura, ¿Que bloque llega primero al suelo?
m_A=5kg, m_B = 15 kg, m_C = 10kg



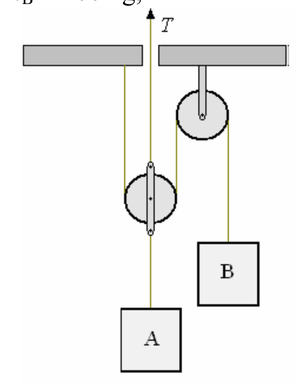
Respuesta. $\vec{a}_A == 4,04\hat{j}$ m/s^2,
$\vec{a}_B == -0,577\hat{j}$ m/s^2, $\vec{a}_C == -2,89\hat{j}$ m/s^2
C llega primero.

18. En la figura μ = 0,45 , 5 kg . m_A = 5 kg, m_B = 20 kg m_C = 15 Kg. determinar la aceleración de cada bloque.



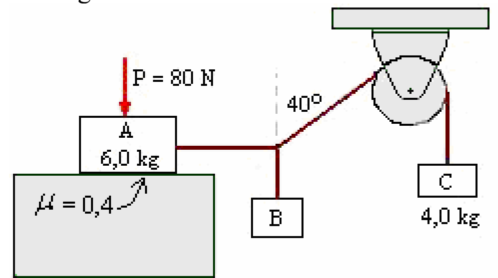
Respuesta. $\vec{a}_A = 4{,}91\hat{j}$ m/s², $\vec{a}_B = -2{,}45\hat{j}$ m/s², $\vec{a}_C = 0$

19. Determinar la aceleración del cilindro B de la figura, si a) T = 1500 N, b) T = 4000 N.
m_A=250 kg, m_B = 100 kg,



Respuesta. a) -3,11 $\hat{j}$ N b) -9,81 $\hat{j}$ N

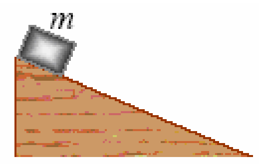
20. Se tiene un sistema formado por tres bloques y una polea sin fricción. El bloque A tiene una masa de 6,0 kilogramos y está en una superficie áspera (μ = 0,40). El bloque C tiene una masa de 4,0 kilogramos. Una fuerza externa P = 80 N, se aplica verticalmente al bloque A, la que mantiene el sistema en equilibrio estático según como se muestra.



a) ¿Cuál es la masa del bloque B? ¿Cuál es la fuerza de fricción sobre el bloque A?
b) se quita la fuerza externa de 8,0 N. Las masas de los bloques B y C se ajustan, de modo el sistema siga en reposo tal como se muestra, pero están justo por iniciar el movimiento. La masa del bloque A no se cambia. Las tensiones en las dos cuerdas verticales son:
Respuesta.
a) 3,1 kg 25.2 N
b) 28 N y 37 N

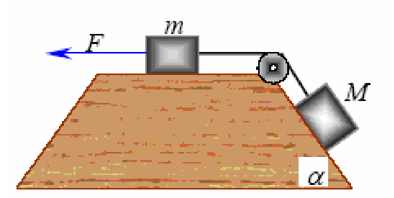
21. Pepe anda esquiando, cuando en algún momento sube 5 m deslizándose por la pendiente de un cerrito nevado en sus esquíes, saliendo desde la cima ubicada a 3 m de altura respecto a la horizontal, con una rapidez de 10 m/s. El coeficiente de roce entre la nieve y los esquíes es 0,1.
a) Calcular la rapidez con la cual el esquiador comienza a subir la pendiente.
b) Determine la distancia horizontal que vuela Pepe cuando sale de la punta del cerro.
Respuesta. a) 13 m/s, b) 16,6 m.

22. El bloque de masa m de la figura parte del reposo, deslizándose desde la parte superior del plano inclinado 30º con la horizontal. El coeficiente de roce cinético es 0,3.
a) Calcular la aceleración del bloque mientras se mueve sobre el plano.
b) Calcular la longitud del plano si el bloque sale con una rapidez de 5 m/s.
c) Si el bloque cae al suelo a una distancia horizontal de 3 m desde el borde del plano, determine el tiempo total del movimiento.



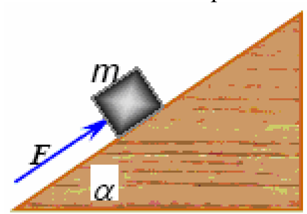
Respuesta. a) 2,4 m/s², b) 5,2 m, c) 2,8 s.

23. En el sistema de la figura, se aplica una fuerza F sobre m. El coeficiente de roce es μ entre cada cuerpo y los planos. Deducir la expresión de la magnitud de F para que el sistema se mueva:
a) con rapidez constante,
b) con aceleración a constante.

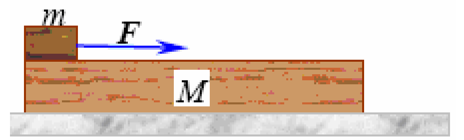


Respuesta. b)
$$Mg(\mu\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) + \mu mg + a(m+M).$$

24. En el sistema de la figura, la fuerza F paralela al plano inclinado empuja al bloque de masa m haciéndolo subir una distancia D sobre el plano, de coeficiente de roce μ. Calcular en función de m, F, g, D, μ y α, la aceleración del bloque.



25. Una fuerza *F* se aplica a un pequeño bloque de masa *m* para hacerlo moverse a lo largo de la parte superior de un bloque de masa *M* y largo *L*. El coeficiente de roce es μ entre los bloques. El bloque *M* desliza sin roce en la superficie horizontal. Los bloques parten del reposo con el pequeño en un extremo del grande, como se ve en la figura.
a) Calcular la aceleración de cada bloque relativa a la superficie horizontal.
b) Calcular el tiempo que el bloque *m* demora en llegar al otro extremo de *M*, en función de *L* y las aceleraciones.



Respuesta. a) $(F-\mu mg)/m$, $\mu mg/(m+M)$,
b) $[2L/(a_1-a_2)]^{1/2}$.

26. Un bloque de masa *M* se ubica sobre un pequeño plano inclinado un ángulo α sin roce, que tiene su extremo inferior fijo a un eje vertical que puede girar. En algún momento el eje gira con el plano con rapidez constante.
Demostrar que si la masa asciende desde la base del plano, su rapidez cuando ha subido una distancia *L* es $v = \sqrt{gL\operatorname{sen}\alpha}$.

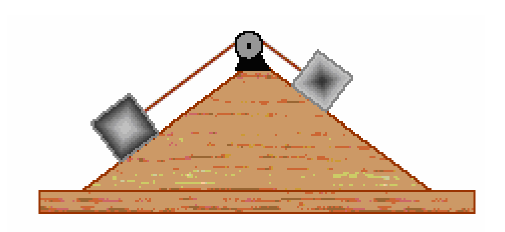
27. Una fuerza dependiente del tiempo, $\vec{F} = \left(8\hat{i} - 4t\hat{j}\right)$ N (donde *t* está en segundos), se aplica a un objeto de 2 kg inicialmente en reposo.
a) ¿En qué tiempo el objeto se moverá con una velocidad de 15 m/s?
b) ¿A qué distancia está de su posición inicial cuando su velocidad es 15 m/s?
c) ¿Cuál es la posición del objeto en este tiempo?
Respuesta. a) 3s, b) 20,1m, c) $\left(18\hat{i} - 9\hat{j}\right)$ m

28. Una araña de 2 x 10^{-4} kg está suspendida de una hebra delgada de telaraña. La tensión máxima que soporta la hebra antes de romperse es 2,1 x 10^{-3} N. ¿Cuál es la aceleración máxima con la cual la araña puede subir por la hebra con toda seguridad?
Respuesta. 0,5m/s^2.

29. Los instrumentos de un globo meteorológico tienen una masa de 1 kg.
a) El globo se suelta y ejerce una fuerza hacia arriba de 5 N sobre los instrumentos. ¿Cuál es la aceleración del globo y de los instrumentos?
b) Después de que el globo ha acelerado durante 10 segundos, los instrumentos se sueltan. ¿Cuál es velocidad de los instrumentos en el momento en que se sueltan?
c) ¿cuál es la fuerza neta que actúa sobre los instrumentos después de que se sueltan?
d) ¿En qué momento la dirección de su velocidad comienza a ser hacia abajo?

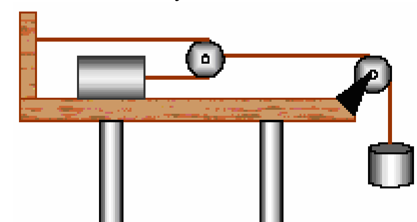
30. Sobre el planeta X un objeto pesa 12 N. En el planeta Y, donde la magnitud de la aceleración de caída libre es 1,6*g*, el objeto pesa 27 N. ¿Cuál es la masa del objeto y cuál es la aceleración de caída libre en el planeta X?
Respuesta. 1,7 kg, 7m/s^2.

31. Dos bloques de 1 y 2 kg, ubicados sobre planos lisos inclinados en 30º, se conectan por una cuerda ligera que pasa por una polea sin roce, como se muestra en la figura. Calcular:
a) la aceleración de cada bloque,
b) la tensión en la cuerda.
c) si la aceleración cuando los planos son rugosos fuera ½ de la calculada en ese problema, calcular: el coeficiente de roce y la tensión en la cuerda.

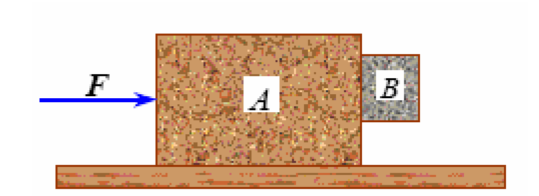


32. Un trineo de 50 kg de masa se empuja a lo largo de una superficie plana cubierta de nieve. El coeficiente de rozamiento estático es 0,3, y el coeficiente de rozamiento cinético es 0,1.
a) ¿Cuál es el peso del trineo?
b) ¿Qué fuerza se requiere para que el trineo comience a moverse?
c) ¿Qué fuerza se requiere para que el trineo se mueva con velocidad constante?
d) Una vez en movimiento, ¿qué fuerza total debe aplicársele al trineo para acelerarlo a 3 m/s^2?

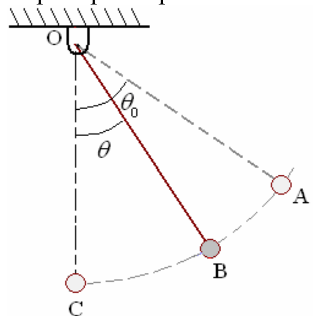
33. La masa m_1 sobre una mesa horizontal sin fricción se conecta a la masa m_2 por medio de una polea móvil y una polea fija sin masas. Si a_1 y a_2 son magnitudes de las aceleraciones de m_1 y m_2, respectivamente. Determinar:
a) una relación entre estas aceleraciones.
b) las tensiones en las cuerdas, y
c) las aceleraciones a_1 y a_2 en función de m_1, m_2 y *g*.



34. Calcular la fuerza *F* que debe aplicarse sobre un bloque *A* de 20 kg para evitar que el bloque *B* de 2 kg caiga. El coeficiente de fricción estático entre los bloques A y B es 0,5, y la superficie horizontal no presenta fricción.

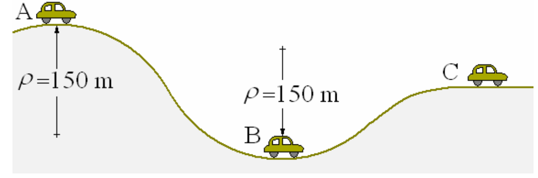


35. Una bola de masa *m* se suelta sin velocidad inicial desde un punto A y oscila en un plano vertical al extremo de una cuerda de longitud *L*. Determinar:
a) la componente tangencial de la aceleración en el punto B.
b) la velocidad en el punto B.
c) la tensión en la cuerda cuando la bola para por el punto mas bajo.
d) el valor de si la tensión en la cuerda es 2 *mg* cuando la bola pasa por el punto C



Respuesta. a) $g\text{sen}\theta$, b) $\sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}$, c) $mg(3 - 2\cos\theta_0)$, d) 60°.

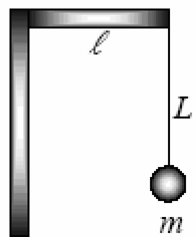
36. Tres automóviles circulan a la velocidad de 80 km/h por la carretera representada en la figura. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre las llantas y la carretera es 0,60, determinar la desaceleración tangencial de cada automóvil sí sus respectivos frenos sen repentinamente accionados y las ruedas deslizan.



Respuesta. a_A =3,91 m/s², a_B = 7,86 m/s², a_C = 5.89 m/s².

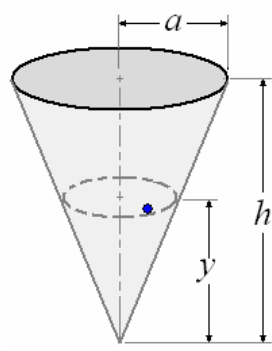
37. ¿Con qué ángulo debe peraltarse una carretera en una curva de 50 m de radio, para que un vehículo pueda tomar la curva a 72 km/h, con un coeficiente de rozamiento 0,30?
Respuesta: $22{,}5° \leq \theta \leq 55{,}9°$

38. En el sistema de la figura, el brazo del péndulo es de longitud ℓ y la cuerda de largo *L*.
a) Calcular la rapidez tangencial para que el sistema gire en torno al eje de rotación que pasa por la barra vertical, de modo que la cuerda que sostiene a la masa *m* forme un ángulo de $\alpha°$ con la vertical.
b) Calcular la tensión de la cuerda.
c) Si el sistema da una vuelta en 30 s, determinar El ángulo que forma la cuerda con la vertical.



Respuesta. a) $v = \sqrt{g(\ell + L\text{sen}\alpha)\tan\alpha}$,
b) *mg*/cos α.

39. Una bola pequeña da vueltas con una rapidez y recorriendo una circunferencia horizontal en el interior de un cono recto de base circular. Expresar la rapidez y en función de la altura y de la trayectoria sobre el vértice del cono.



Respuesta. $v = \sqrt{gy}$

40. ¿Cuál es el mínimo radio que un motociclista con velocidad de 21 m/s puede hacer en una pista que tiene un coeficiente de fricción con las llantas igual a 0,3? ¿Cuál es el ángulo que hará la motocicleta con la horizontal?
Respuesta: 147 m; 73° 20'

41. Un estudiante hace girar un balde que contiene 2 kg de agua en una circunferencia vertical de 1,2m de radio, considerar
a) ¿Cuál es la máxima velocidad para que el agua permanezca en el balde?
b) ¿Cuál es la fuerza ejercida por el balde sobre el agua en el punto inferior de la circunferencia?
c) ¿a la altura de los hombros?
d) Si el balde pesa 10k, hallar cada una de las fuerzas que actúan sobre el balde en el punto inferior de la circunferencia.

Respuesta. a) $2\pi\sqrt{\dfrac{r}{g}}$, b) $2mg$, c) $\sqrt{2}mg$
d) 10 N debido a la tierra, 40 N debido al agua, 100 N debido al hombre.

42. Una mesa giratoria horizontal tiene una aceleración angular de α = 3 rad/s². En el instante en que la velocidad angular vale 2,4 rad/s, una partícula

de masa 1,8 kg descansa sin deslizar sobre la mesa, con tal que esté situada a una distancia inferior a 50 cm del eje vertical de rotación de la mesa,
a) ¿Cuál es el valor de la tuerza de rozamiento?
b) Hallar el coeficiente de rozamiento estático entre el objeto y la mesa.
Respuesta: a) F_f = 7,9 N b) μ_s = 0,45

43. Se tiene una partícula de masa 5*g* que se mueve sobre una trayectoria curva y su aceleración en un momento dado vale $\vec{a} = \left(3\hat{t} + 4\hat{n}\right)$ cm/s². Hallar:
a) la aceleración tangencial,
b) la aceleración centrípeta,
c) el módulo de la aceleración total,
d) el ángulo ϕ que la aceleración total forma con la tangente a la curva,
e) la componente tangencial de la fuerza aceleradora,
f) la componente centrípeta de la fuerza aceleradora,
g) la fuerza aceleradora total.
Respuesta. a) a_t = 3 cm/s^2 , b) a_t = - 4 cm/s^2 ; c) a = 5 cm/s^2, d) ϕ = 53,1°; e) F_t = 15 x 10^{-5} N, f) F_r = 20 x 10^{-5} N, g) F = 25 x 10^{-5} N.

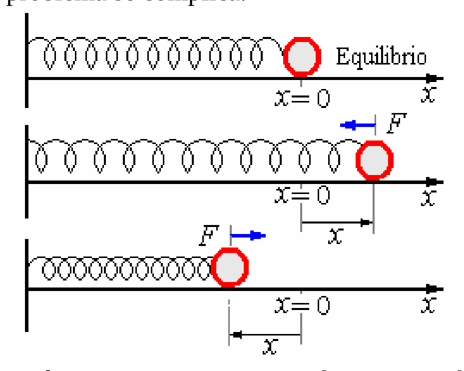
44. Describir e interpretar las fuerzas que realmente se apreciarían si nos encontráramos con los ojos vendados y:
a) de pie sobre una plataforma elevada.
b) cayendo libremente en el aire.
c) estando sentado en el suelo de una plataforma en rotación, como la de un carrusel a una cierta distancia de su centro.
Respuesta. a) Una fuerza de reacción de la plataforma hacia arriba.
b) Ninguna fuerza.
c) Una fuerza de reacción de la plataforma y una fuerza hacia afuera (radial).

45. Calcular el ángulo de peralte de una carretera en una curva de radio 150 m, para que un camión de 15 toneladas pueda girar con una rapidez de 70 km/hr, sobre un pavimento cubierto de escarcha.
Respuesta. 14º

CAPÍTULO 5. TRABAJO Y ENERGÍA

INTRODUCCIÓN

Con lo que hemos visto hasta el momento estamos en condiciones de analizar un movimiento en situaciones en que la fuerza es constante. Una vez aplicada La segunda ley de Newton, determinamos la aceleración $a = F/m$. De aquí podemos determinar la velocidad y la posición. Pero en el caso en que la fuerza no es constante, por ejemplo cuando se jala una masa situada en un extremo de un resorte, el problema se complica.



La figura muestra un cuerpo de masa *m* sobre una superficie horizontal lisa, conectado a un resorte helicoidal. Si el resorte se estira o se comprime una longitud pequeña desde su posición no deformada o de equilibrio, el resorte ejercerá una fuerza sobre el cuerpo $F = -kx$, donde x es el desplazamiento del cuerpo desde la posición de equilibrio $(x = 0)$, k es la constante del resorte, el signo negativo (-) significa que la fuerza es en sentido opuesto al sentido del desplazamiento. Esta ley de fuerza se conoce como la ley de Hooke, de la cual nos ocuparemos en el Capítulo de Elasticidad

Apliquemos la segunda ley de Newton:

$$\sum F = ma$$

Con $F = -kx$ y $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$,

Obtenemos:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

A pesar de ser una ecuación simple esta última, todavía no tenernos el conocimiento matemático para resolverla. Es decir, estamos en condiciones de plantear las ecuaciones del movimiento, pero no sabemos resolverlas.

Veremos aquí que se puede tomar un atajo y resolver de otra forma el problema. En este capitulo se verán los conceptos de Trabajo y Energía que se pueden aplicar a la dinámica de un sistema mecánico sin recurrir a las leyes de Newton.

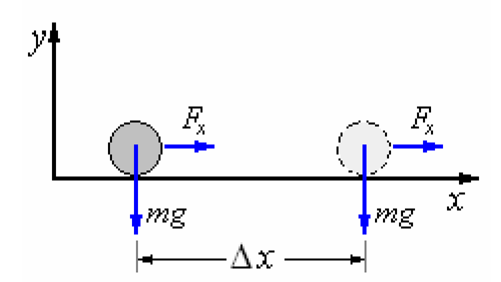
Sin embargo, es importante notar que los conceptos de Trabajo y Energía se fundamentan en las leyes de Newton y por lo tanto no requieren ningún principio nuevo.

TRABAJO

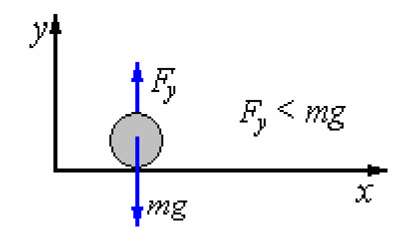
El término "trabajo" que se usa en la vida cotidiana es para definir una actividad de algún tipo que incluye un esfuerzo físico o mental y cuya finalidad sea el alcance de algún objetivo definido y bien establecido. En el estudio de la mecánica tiene un significado más restringido, por ejemplo si subimos cierta altura *h* con una masa *m* decimos que hemos realizado un trabajo *W*, si subimos la misma altura *h* pero con una masa 2*m*, se habrá realizado un trabajo 2*W*, igual a que si se hubiese transportado una masa *m* una altura 2*h*, o si se hubiese transportado dos veces la masa *m*, la altura *h*. Estas observaciones sugieren que el trabajo es una magnitud física proporcional a la fuerza y a la distancia, pero que puede sumarse como un escalar.

Cuando una fuerza constante F_x mueve un cuerpo realizando un desplazamiento Δx que tiene la misma dirección que la fuerza, se define la cantidad de trabajo realizado por esta fuerza como:

$$W = F_x \Delta x$$



Ahora consideremos que sobre la misma masa m actúa una fuerza vertical F_y, menor que el peso mg del bloque, como tal no dará origen a ningún movimiento vertical y por lo tanto no estará realizando trabajo.

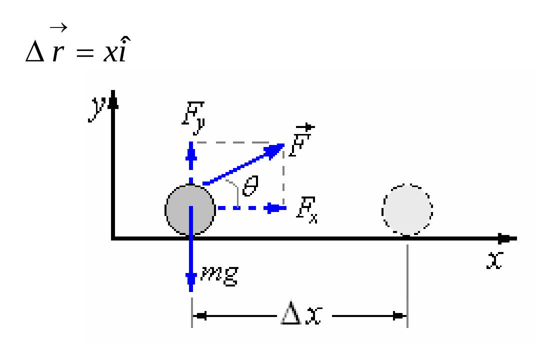


Si ahora aplicamos al mismo tiempo las dos fuerzas, la fuerza aplicada es:

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$$

Si el desplazamiento del bloque es únicamente en la dirección *x*,

$\Delta \vec{r} = x\hat{i}$



El trabajo realizado es el producto escalar de la tuerza por el desplazamiento es:

$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = \left(F_x \hat{i} + F_y \hat{j}\right) \cdot \Delta x \hat{i} = F_x \Delta x$

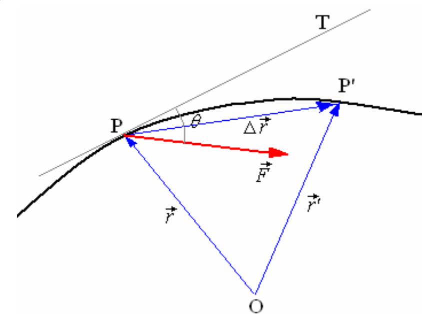
O $\Delta W = F \Delta x \cos\theta$

Donde

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ y

θ es el ángulo formado entre la fuerza aplicada y el desplazamiento.

Consideremos el caso general de una fuerza $\vec{F}$ cualquiera que mueve a una partícula sobre una trayectoria curva como se muestra en la siguiente figura.



Sea P la posición de la partícula en un instante t, la posición con respecto al origen de coordenadas O está dada por

$\vec{OP} = \vec{r}$

La partícula en el tiempo Δt describe la trayectoria

$\overset{\frown}{PP'}$, si esta es suficientemente pequeña se puede asimilar como la cuerda $\vec{PP'}$, el desplazamiento de la partícula en el tiempo Δt es $\vec{PP'} = \Delta \vec{r}$

Cuando P' tiende a P $(\Delta t \rightarrow 0)$.

La dirección de la cuerda $\vec{PP'}$ es el de la tangente PT en P, $\Delta \vec{r}$ es $d\vec{r}$, la fuerza es constante en dirección y sentido.

El trabajo de la fuerza $\vec{F}$ para el desplazamiento $d\vec{r}$ es un trabajo diferencial.

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$dW = \left|\vec{F}\right| \left|d\vec{r}\right| \cos\theta$

$dW = F\, ds \cos\theta$

$dW = F_t\, ds$

Es el trabajo realizado por la componente tangencial de la fuerza F_t.

El trabajo de la componente normal F_n es nulo.

Para evaluar el trabajo realizado para ir desde el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a un punto $P_2(x_2, y_2, z_2)$ tenemos que integrar el trabajo diferencial.

$$W_{P_1P_2} = \int_{P_1}^{P_2} dW = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Para esto tenemos que conocer como varía $\vec{F}$

$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$

Siendo $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$

Tenemos: $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

Luego: $W_{P_1P_2} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz$

La unidad de trabajo es una unidad derivada de las unidades de fuerza y de longitud.

$[W] = FL = ML^2T^{-2}$

En el sistema Internacional la unidad de trabajo es el Joule (J).

1 Joule = (1 Newton)(1 metro)

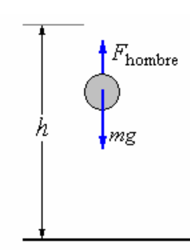
Ejemplo 1. Un hombre levanta una masa *m* con una fuerza tal que la coloca a una altura *h* sobre el piso a velocidad constante.

a) ¿Cuánto trabajo realiza la gravedad?

b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que ejerce el hombre?

Solución.

a)



$$W_{gravedad} = \int_{y=0}^{y=h} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^h \left(-mg\hat{k}\right) \cdot dy\hat{k}$$

$$= -mg\int_0^h dy = -mgh$$

b) Podríamos hacerlo directamente por la ley de Newton, pero lo haremos con los conceptos de trabajo. Como la masa se mueve con velocidad constante, el trabajo realizado es cero.

$W_{hombre} + W_{gravedad} = 0$

$$\Rightarrow W_{\text{hombre}} = -W_{gravedad} = mgh$$

También tenemos:

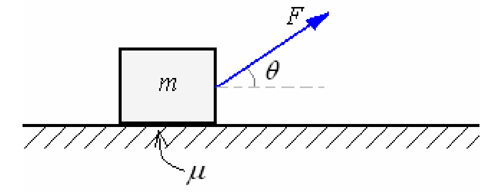
$$W_{\text{hombre}} = \int_{y=0}^{y=h} \vec{F}_{\text{hombre}} \cdot d\vec{r} = \int_0^h F\hat{k} \cdot dy\hat{k}$$

$$= F\int_0^h dy = Fh$$

Luego: $Fh = mgh \Rightarrow F = mg$

Y $\vec{F} = mg\hat{k}$

Ejemplo 2. Se arrastra una caja de masa m sobre un piso horizontal, el coeficiente de fricción cinético entre la caja el piso es μ, mediante una fuerza que forma un ángulo θ con la horizontal, la caja se desplaza un distancia s hacía la derecha,
a) Calcule el trabajo realizado por la fuerza
b) Calcule el trabajo efectuado por La fuerza de fricción.
e) Determine el trabajo neto efectuado sobre la caja por todas las fuerzas que actúan sobre ella.



Solución.

a) El trabajo efectuado por $\vec{F}$ es:

$$W_F = \int_{x=0}^{x=s} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Como $\vec{F} = F\cos\theta\,\hat{i} + F\text{sen}\theta\,\hat{j}$ y $d\vec{r} = dx\hat{i}$

$$W_F = \int_{x=0}^{x=s} \left(F\cos\theta\,\hat{i} + F\text{sen}\theta\,\hat{j}\right) \cdot dx\hat{i}$$

$$= Fs\cos\theta = F_x\, s$$

La componente vertical de $\vec{F}$ no realiza trabajo.

b) Como $\vec{F}_f = -\mu N\hat{i}$

Y $N = mg - F\text{sen}\theta$

Obtenemos $\vec{F}_f = -\mu\left(mg - F\text{sen}\theta\right)\hat{i}$

El trabajo efectuado por $\vec{F}_f$ es

$$W_f = \int_0^s \vec{F}_f \cdot d\vec{r} = \int_0^s -\mu\left(mg - F\text{sen}\theta\right)\hat{i} \cdot dx\hat{i}$$

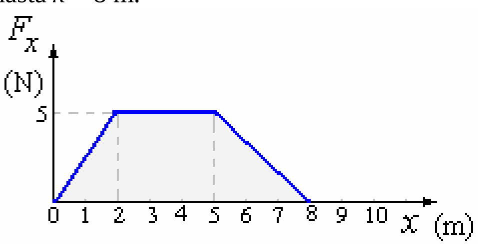
$$= -\mu\left(mg - F\text{sen}\theta\right)s$$

c) El trabajo neto sobre la caja es la suma de los resultados obtenidos en a) y b).

$$W_{neto} = W_F + W_f = F\cos\theta s - \mu\left(mg - F\text{sen}\theta\right)s$$

$$= \left[F\cos\theta - \mu\left(mg - F\text{sen}\theta\right)\right]s$$

Ejemplo 3. Una fuerza que actúa sobre un cuerpo varía con respecto a x como se muestra en la figura. Calcule el trabajo cuando el cuerpo se mueve desde x = 0 hasta x = 8 m.

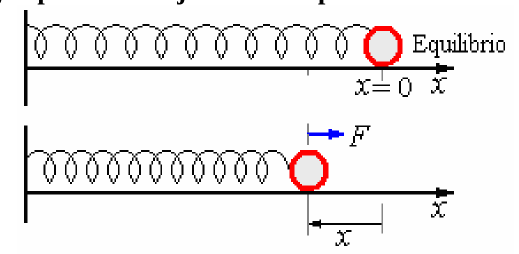


Solución.
El trabajo realizado por la fuerza es exactamente igual al área bajo la curva desde x = 0 hasta x = 8.

$$W = \frac{1}{2}(5\text{N})(2-0)\text{m} + (5\text{N})(5-2)\text{m} + \frac{1}{2}(5\text{N})(8-5)\text{m}$$

= (5 + 15 + 7,5) Nm
= 27,5 J

Ejemplo 4. Trabajo realizado por un resorte.



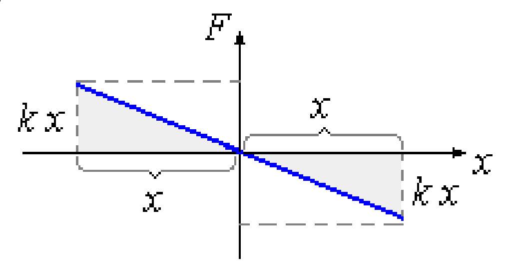
El resorte de la figura, cuando se deforma o estira hasta una cierta posición x, ejercerá una fuerza restauradora $F = -kx$.

Solución.
Supongamos que el objeto se empuja hacia la izquierda una distancia x respecto a la posición de equilibrio y se deja libre.
El trabajo realizado desde $x_1 = -x$ hasta $x_2 = 0$ por la fuerza del resorte a medida que el objeto se mueve es

$$W = \int_{x_1=-x}^{x_2=0} F_x dx = \int_{-x}^{0} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx^2$$

Y si consideramos el trabajo realizado por el resorte a medida que se estira de $x_1 = 0$ a $x_2 = x$ el trabajo es $W = -\frac{1}{2}kx^2$

Este resultado podemos obtenerlo también de La gráfica F versus x, como se muestra en la figura siguiente.



Ejemplo 5. La posición de una partícula en el plano está dada por $\vec{r} = 3t\hat{i} - 2t^2\hat{j}$ (t en segundos, r en

metros), la fuerza ejercida sobre la misma es

$\vec{F} = 4\hat{i} - 5\hat{j}$ (en Newton).

¿Qué trabajo se realiza sobre la partícula en el intervalo de t = l s a t = 3 s?

Solución.

$\vec{r} = 3t\hat{i} - 2t^2\hat{j} \Rightarrow d\vec{r} = 3dt\hat{i} - 4tdt\hat{j}$

Luego

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(4\hat{i} - 5\hat{j}\right)\cdot\left(3dt\hat{i} - 4tdt\hat{j}\right)$$
$$= 12dt + 20tdt$$

El trabajo W realizado sobre la partícula entre t = 1 y t = 3.

$$W = \int_{xt=1}^{t=3} dW = \int_1^3 (12 + 20t)dt$$
$$= \left[12t + \frac{1}{2}20t^2\right]_1^3 = 126 - 22 = 104 \text{ J}$$

El trabajo realizado sobre la partícula es 104 Joules.

ENERGIA CINETICA

Consideremos una partícula de masa m bajo la acción de la fuerza $\vec{F}$.

La segunda ley de Newton afirma que:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

También sabemos que $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$.

Multiplicando escalarmente:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt = m\vec{v}\cdot d\vec{v}$$

Como $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ es el trabajo diferencial dW y

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot d\vec{v}\right)$$
$$= \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{2}m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}$$
$$= m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

De aquí:

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = m\vec{v}\cdot d\vec{v}$$

Reemplazando obtenemos:

$$dW = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

El trabajo para ir de P_1 donde la velocidad es v_1 al punto P_2 donde la velocidad es v_2 será:

$$W_{1\to 2} = \int_{P_1}^{P_2} dW = \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Aquí tenemos una medida para el trabajo realizado sobre la partícula expresada en función de la variación de la magnitud $\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$.

Esta magnitud se define como la ENERGIA CINETICA K de la partícula.

Entonces: $K = \frac{1}{2}mv^2$

La energía cinética es una propiedad general del movimiento de la partícula es la ENERGIA DEL MOVIMIENTO. Sus dimensiones son las de trabajo.

$[K] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}$

Su unidad es la misma que la del trabajo.

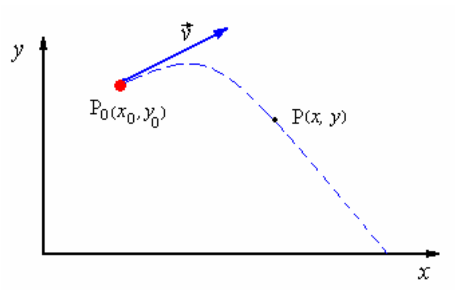
Resulta conveniente escribir:

$W_{1\to 2} = K_2 - K_1 = \Delta K$

El trabajo realizado por la fuerza al desplazar una partícula es igual al cambio de energía cinética de la partícula.

Ejemplo 6. Encontrar la variación de la energía cinética de un proyectil en función de su altura. Se lanza un proyectil de masa m desde el punto P_0 (x_0, y_0) con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$.

Solución.



Para un proyectil la posición en función del tiempo es;

$$x = x_0 + v_{0x}t,\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Y la velocidad

$v_x = v_{0x}$, $v_y = v_{0y} - gt$

La energía cinética en P_0 es

$$K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(v_{0x}^2 + v_{0y}^2\right)$$

La energía cinética en P es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}m\left(v_{0x}^2 + v_{0y}^2 - 2v_{0y}gt + g^2t^2\right)$$

La variación de energía entre P y P_0 es:

$$\Delta K = K - K_0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(-2v_{0y}gt + g^2t^2\right)$$

$$= -mg\left(v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2\right)$$

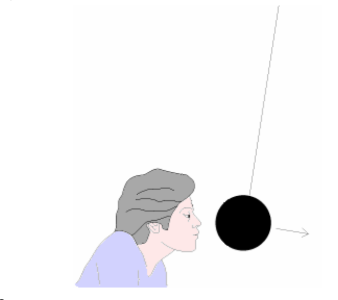
Como $y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

Resulta $\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mg(y - y_0)$

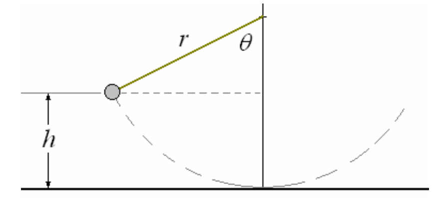
Ejemplo 7. En una demostración experimental para ilustrar la conservación de la energía por medio del dispositivo siguiente. Se ata una bola del bowling a un extremo de una cuerda, y se sujeta el otro extremo al techo de la sala de conferencias. Se sostiene la bola parado en una escala tijeras alta, Para la demostración se suelta del reposo en el extremo de la nariz, la bola volverá de la oscilación más arriba y golpeará violentamente la cara, (intente esto alguna vez si usted desea experimentar un juego para asustar)

La demostración impresiona a la clase, pero no por la razón esperada. Aunque la cuerda es bastante fuerte para sostener la bola cuando está inmóvil, cuando la dejé ir, la cuerda se rompió en el fondo del arco y la bola fue despedida alrededor del salón "Boing boing, boing" y dispersó a los presentes en todas las direcciones.

Una bola de bowling realmente rebota en el concreto. Suponga que la bola pesa 80 N y la cuerda tenía 4,0 m de largo y tenía una resistencia a ruptura de 120 N. ¿Cuál es el máximo ángulo con la vertical con el que se habría podido lanzar la bola sin tener la rotura de la cuerda?



Solución.



La cuerda debe proporcionar suficiente fuerza ascendente para balancear el peso más la fuerza radial necesaria para que la bola haga la curva hacia arriba. La tensión en la cuerda será así la mayor en el punto más bajo del arco, donde la fuerza de la gravedad está dirigida hacia abajo y la bola se mueve lo más rápidamente.

$$\text{fuerza radial} = \frac{mv^2}{r}$$

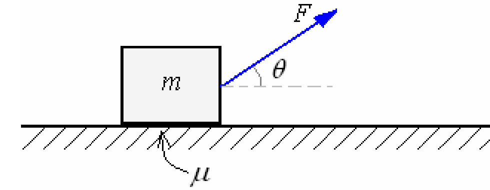
$T - mg = \dfrac{mv^2}{r}$ y $mhg = \dfrac{1}{2}mv^2$

$h = r - r\cos\theta$ $T - mg = 2mg(1 - \cos\theta)$

$$\cos\theta = 1 - \frac{T - mg}{2mg} = 1 - \frac{120 - 80}{2(80)} = 0{,}75$$

$$\Rightarrow \theta = 41{,}4^\circ$$

Ejemplo 8. Se arrastra una caja de masa m sobre un piso horizontal, el coeficiente de fricción cinético entre la caja el piso es μ, mediante una fuerza que forma un ángulo θ con la horizontal. Si se empieza a jalar desde el reposo y considerando que ya se inició el movimiento ¿Cuál es la velocidad del bloque después que recorre una distancia s?



Solución.

En este caso como la fuerza F es constante, por la ley de Newton podríamos encontrar la aceleración, que es constante, pero vamos a hacerlo por conceptos de Energía Cinética y Trabajo.

Encontramos que

$$W_{Neto} = [F\cos\theta - \mu(mg - Fsen\theta)]s$$

Sabemos que

$$W_{Neto} = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

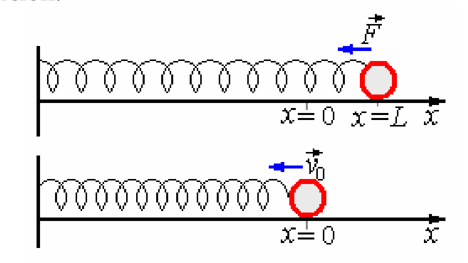
Como: $v_1 = 0$ y $v_2 = v$

Finalmente:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}[F\cos\theta - \mu(mg - Fsen\theta)]s}$$

Ejemplo 9. Para el caso de la masa m atada a un resorte con constante de rigidez k. ¿Cuál es la velocidad cuando pasa por la posición de equilibrio después de estirarlo una longitud L y soltarlo?

Solución.



El trabajo realizado desde $x = L$ a $x = 0$ por la fuerza restauradora del resorte $F = -kx$ Es:

$$W_R = \frac{1}{2}kL^2$$

También $W_R = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$

Siendo $v_2 = v_0$ y $v_1 = 0$

Tenemos $\frac{1}{2}kL^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - 0$

$$\Rightarrow v_0 = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}L$$

Para el caso que mostramos la respuesta correcta es la negativa.

Ejemplo 10. Un objeto de masa *m* se mueve en el eje *x* sujeto a la fuerza $\vec{F} = m\frac{A}{x^2}\hat{i}$ donde *A* es una constante y *x* es la distancia desde el origen.
a) ¿Cuánto trabajo realiza esta fuerza si el objeto se mueve de $x = a$ a $x = b$?
b) ¿Si la masa tenía una velocidad *v* en la dirección positiva de *x*, Cuál es su velocidad en *b*?
Solución.
a) El trabajo que realiza la fuerza para mover la masa desde $x = a$ a $x = b$ es:

$$W_{ab} = \int_{x=a}^{x=b} \vec{F}\cdot d\vec{r}\ ,\ \vec{F} = m\frac{A}{x^2}\hat{i}\ ,\ d\vec{r} = dx\hat{i}$$

Luego $W_{ab} = \int_a^b m\frac{A}{x^2}\hat{i}\cdot dx\hat{i} = mA\int_a^b \frac{dx}{x^2} =$

$$mA\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = mA\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

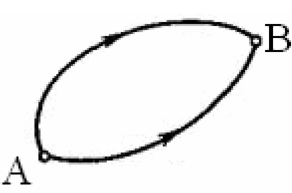
b) Como $W_{ab} = K_b - K_a = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$

Siendo $v_a = v_0$

Tenemos $mA\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

$$v_b = \sqrt{2A\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + v_0^2}$$

SISTEMAS CONSERVATIVOS Y NO CONSERVATIVOS
Un sistema conservativo es aquel en el que el trabajo realizado por las fuerzas del sistema es independiente de la trayectoria seguida por el móvil desde una posición a otra, no existen fuerzas de rozamiento, ni dispositivos que puedan producir pérdida de la energía cinética.



Si en un sistema conservativo el trabajo efectuado por la fuerza para desplazar la partícula de A a B es independiente del camino entre A y B, se puede escribir:

$$W_{AB} = -W_{BA}$$

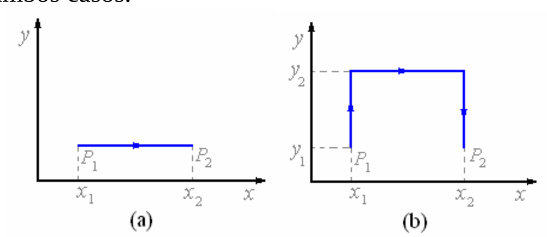
En un circuito cerrado

$$W_{AA} = W_{AB} + W_{BA}$$

Como $W_{AB} = -W_{BA} \Rightarrow W_{AA} = W_{AB} - W_{AB} = 0$

El trabajo total efectuado por una fuerza conservativa sobre una partícula es cero cuando la partícula se mueve alrededor de cualquier trayectoria cerrada y regresa a su posición inicial.
Naturalmente la definición de un sistema no conservativo es aquel que no satisface las condiciones anteriores.

Ejemplo 11. Sistema no Conservativo. - La fuerza de fricción. Supongamos que un bloque se mueve del punto P_1 (x_1, y_1) al punto P_2 (x_2, y_1), siguiendo Las trayectorias mostradas en las figuras siguientes, el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es μ. Calcular el trabajo realizado por la fricción en ambos casos.



Solución.
Por la trayectoria (a)

$$W_{P_1P_2} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_f \cdot d\vec{r}$$

Aquí $\vec{F}_f = -\mu N\hat{i}\ ,\ d\vec{r} = dx\hat{i}$

Luego

$$W_{P_1P_2} = \int_{x_1}^{x_2} (-\mu N)dx = \mu N(x_2 - x_1)$$

Por la trayectoria (b)

$$W_{P_1P_2} = \int_{y_1}^{y_2} \vec{F}_{f1}\cdot d\vec{r}_1 + \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_{f2}\cdot d\vec{r}_2 + \int_{y_2}^{y_1} \vec{F}_{f3}\cdot d\vec{r}_3$$

Aquí

$$\vec{F}_{f1} = -\mu N\hat{j}\ ,\ d\vec{r}_1 = dy\hat{j}$$

$$\vec{F}_{f2} = -\mu N\hat{i}\ ,\ d\vec{r}_2 = dx\hat{i}$$

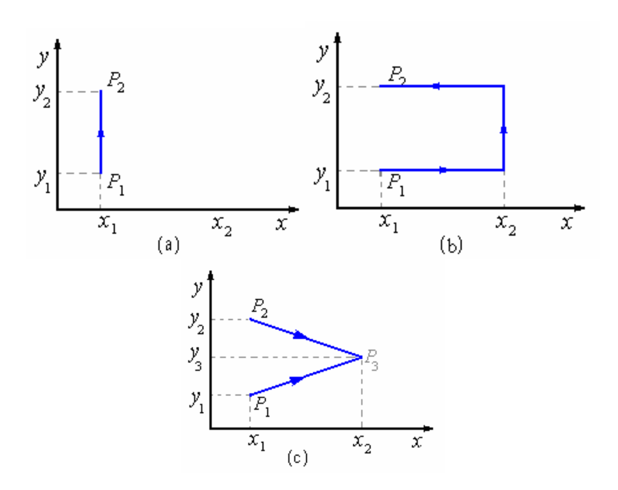
$$\vec{F}_{f3} = \mu N\hat{j}\ ,\ d\vec{r}_3 = dy\hat{j}$$

Luego

$$W_{P_1P_2} = \int_{y_1}^{y_2} (-\mu N)dy + \int_{x_1}^{x_2} (-\mu N)dx + \int_{y_2}^{y_1} (\mu N)dy$$
$$= -\mu N(y_2 - y_1) - \mu N(x_2 - x_1) + \mu N(y_1 - y_2)$$
$$= -\mu N(x_2 - x_1) - 2\mu N(y_2 - y_1)$$

Obviamente el trabajo realizado por la fuerza de fricción por las dos trayectorias a) y b) no son iguales, por consiguiente cuando hay fuerza de fricción el sistema no es conservativo. (La fricción no es conservativa).

Ejemplo 12. Sistema Conservativo. La fuerza de la gravedad Supongamos que un bloque de masa *m* se mueve del punto $P_1(x_1, y_2)$ al punto $P_2(x_2, y_2)$ donde *y* es la dirección vertical. Calcular el trabajo realizado por la fuerza gravitacional con los tres casos mostrados en la figura.



Solución.

Por la trayectoria a)

$$W_{P_1P_2} = \int_{y_1}^{y_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r}$$

Aquí

$\vec{F}_g = -mg\hat{j}$, $d\vec{r} = dy\hat{j}$

Luego

$$W_{P_1P_2} = \int_{y_1}^{y_2} -mgdy = -mg(y_2 - y_1)$$

Por la trayectoria b)

$$W_{P_1P_2} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r}_1 + \int_{y_1}^{y_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r}_2 + \int_{x_2}^{x_1} \vec{F}_g \cdot d\vec{r}_3$$

Aquí

$\vec{F}_g = -mg\hat{j}$, $d\vec{r}_1 = dx\hat{i}$, $d\vec{r}_2 = dy\hat{j}$, $d\vec{r}_3 = dx\hat{i}$

Luego

$$W_{P_1P_2} = 0 + \int_{y_1}^{y_2} (-mg)dy + 0 = -mg(y_2 - y_1)$$

Igual que en a)

Por la trayectoria c).

$$W_{P_1P_2} = W_{P_1P_3} + W_{P_3P_2}$$

$$W_{P_1P_2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} + \int_{r_3}^{r_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r}$$

Aquí

$\vec{F}_g = -mg\hat{j}$, $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$

$\vec{F}_g \cdot d\vec{r} = (-mg\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) = (-mg)dy$

Luego

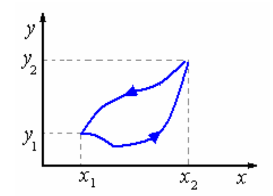
$$W_{P_1P_2} = \int_{y_1}^{y_3} (-mg)dy + \int_{y_3}^{y_2} (-mg)dy$$
$$= -mg(y_3 - y_1) - mg(y_2 - y_3)$$
$$= -mg(y_2 - y_1)$$

Resultado igual que en a) y b)

Luego la fuerza de la gravedad es una fuerza conservativa.

Trabajo en una trayectoria cerrada.

Si completamos la trayectoria volviendo al punto inicial, tenemos una trayectoria cerrada y el trabajo es cero.



El trabajo para ir de 1 a 2 es

$$W_{r_1r_2} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = \int_{x_1}^{x_2} (F_x\hat{i} + F_y\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j})$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy$$

Como

$\vec{F} = -mg\hat{j}$: $F_y = -mg$. $F_x = 0$

$$W_{r_1r_2} = 0 - mg(y_2 - y_1)$$
$$= -mg(y_2 - y_1)$$

El trabajo para ir 2 a 1 es

$$W_{r_2r_1} = \int_{x_2}^{x_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_2}^{x_1} F_x dx + \int_{y_2}^{y_1} F_y dy$$
$$= 0 - mg(y_1 - y_2)$$
$$= -mg(y_1 - y_2)$$

El trabajo total es

$$W_{r_1r_1} = W_{r_1r_2} + W_{r_2r_1}$$
$$= -mg(y_2 - y_1) - mg(y_1 - y_2)$$
$$= 0$$

Esto no sucedería en el caso de una fuerza no conservativa, como la fuerza de fricción.

LA FUNCION ENERGÍA POTENCIAL

El trabajo realizado por la fuerza

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

Para mover una partícula de $P_1(x_1. y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es igual a:

$$W_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

Para un sistema conservativo el trabajo es independiente de la trayectoria seguida.
Su integral debe ser un diferencial exacto, digamos - dU, tal que integrándolo, solamente los límites determinan el valor de la integral.
Esto es:

$$W_{12} = \int_{P_1}^{P_2} (-dU) = (-U)_{P_1}^{P_2} = -(U_2 - U_1) = -\Delta U$$

Aquí llamamos a U, energía potencial, cuyas unidades son las mismas que las de trabajo.

Hemos determinado la función energía potencial a partir de una fuerza dada.

Consideremos ahora el problema inverso, a partir de una función energía potencial determinar la fuerza

$$dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

Como U es función de x, y y z, podemos escribir esta derivada en función de sus derivadas parciales:

$$dU_{(x,y,z)} = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

Relacionando con los componentes de la fuerza obtenemos

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

Ejemplo 13. La fuerza de la gravedad es un ejemplo de fuerza conservativa.
Solución.
Tomemos la vertical a la tierra como el eje y, tal que:

$$\vec{F}_g = F_g\hat{j} = -mg\hat{j}$$

El trabajo realizado por la gravedad cuando la partícula se desplaza desde el punto y_1 al punto y_2 es:

$$W_{12} = \int_{y_1}^{y_2} -mg\hat{j}\cdot dy\hat{j} = -mg\int_{y_1}^{y_2} dy$$
$$= -mg(y_2 - y_1)$$

Como $W_{12} - \Delta U$:

$$-mg(y_2 - y_1) = -\Delta U = U_{(y_1)} - U_{(y_2)}$$

O $\Delta U = U_{(y_2)} - U_{(y_1)} = mgy_2 - mgy_1$

Si consideramos la energía potencial igual a cero en el nivel de referencia $y = 0$, la energía potencial a cualquier altura con respecto a $y = 0$ es:

$$U_{(y)} = mgy$$

También podíamos haber determinado esta función a partir de:

$$dU = -F_g dy \Rightarrow dU = -(-mg)dy = mgdy$$

Integrando

$$\int dU = \int mgdy + C$$
$$U_{(y)} = mgy + C$$

Donde C es una constante relacionada con las condiciones de cada caso, por ejemplo aquí consideramos para $y = 0$

$\Rightarrow U_{(0)} = 0$.

La constante es $C = 0$

$\Rightarrow U_{(y)} = mgy$

Como comprobación, a partir de esta energía potencial podemos encontrar la fuerza.

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial mgy}{\partial x} = 0$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial mgy}{\partial y} = -mg$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial mgy}{\partial z} = 0$$

Luego: $\vec{F} = -mg\hat{j}$

Ejemplo 14. Determinar la función energía potencial asociada a un resorte de constante de rigidez k.
Solución.
Consideremos que el resorte está en el eje x, y se estira en esa dirección.

$$\vec{F} = -kx\hat{i}$$

Tenemos que:

$$dU = -F_x dx = -(-kx)dx = kxdx$$

Integrando

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

Si para la posición de equilibrio $x = 0$, la energía potencial es cero, C es igual a cero y

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Ahora realicemos el problema inverso:

Dado $U = \frac{1}{2}kx^2$ encontrar la fuerza correspondiente:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

Luego $\vec{F} = -kx\hat{i}$

Ejemplo 15. Energía potencial gravitatoria cerca de la tierra. Por la ley de Newton de la gravitación universal, la fuerza de atracción de dos masas es directamente proporcional al producto de estas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$$

Donde *m* es la masa e un cuerpo, *M* la masa de la tierra, *r* la distancia entre las masas, *G* es la constante gravitatoria universal.
Si *r* = *R* (radio de la tierra), la masa *m* está sobre la superficie de la tierra y

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{R^2}\hat{r} = -mg\hat{r}$$

La energía potencial es

$$dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = G\frac{mM}{r^2}dr$$

$$U = \int G\frac{mM}{r^2}dr + C$$

$$U = -G\frac{mM}{r} + C$$

Para evaluar la constante *C* consideremos que el potencial *U* es cero para *r* infinito, de aquí C es igual a cero,
Luego

$$U_{(r)} = -G\frac{mM}{r}$$

CONSERVACION DE LA ENERGÍA

Hasta esta parte tenemos dos formas de encontrar el trabajo realizado sobre un objeto por una fuerza, la primera válida para todo caso ya sea fuerza conservativa o no conservativa

$$W_{12} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = K_2 - K_1 = \Delta K .$$

Y la segunda para el caso de fuerzas conservativas

$$W_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

Luego podemos escribir

$$W_{12} = K_2 - K_1 = U_1 - U_2$$

Colocando las energías iniciales a un lado y las finales al otro tenemos:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Esta ecuación es la forma matemática de "El principio de conservación de la energía mecánica".
Si definimos la energía mecánica total del sistema *E* como la suma de la energía cinética y potencial se puede expresar la conservación de la energía mecánica como:

$$E = K + U = \text{Constante}$$

Ejemplo 16. Fuerza de la gravedad: Se suelta una partícula de masa *m* desde la altura *h* sobre el suelo. Cuando la partícula está a una altura y del suelo, su velocidad es *v*.

Su energía potencial es $U = mgy$

Su energía cinética es $K = \frac{1}{2}mv^2$

La energía mecánica total es:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Para $y = h$, $v = 0$

$$E = 0 + mgh = mgh$$

Para $y = 0$, $v = v_0$

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

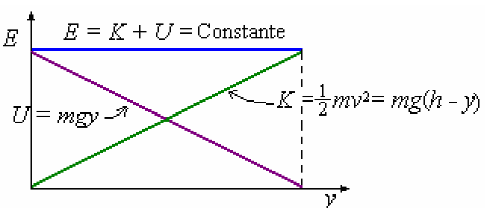
Para cualquier instante

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgh$$

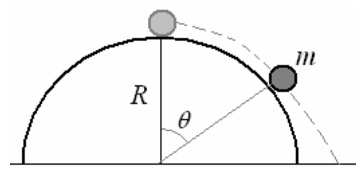
De aquí $v^2 = 2g(h - y) \Rightarrow$

$$v = \sqrt{2g(h - y)}$$

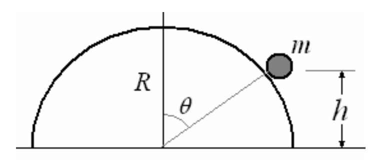
El gráfico de la variación de energía potencial y cinética es:



Ejemplo 17. Una masa pequeña *m* se suelta desde el reposo de la parte más alta de una superficie esférica de radio *R*, sin fricción. ¿A qué ángulo con vertical dejará el contacto con la esfera?



Solución.
Cuando la masa está a una altura *h* su energía es igual a cuando está en el punto más alto.



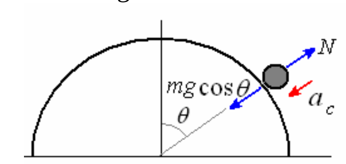
$$mgR + 0 = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

Con $h = R\cos\theta$

$$mgR = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow v^2 = gR(2 - 2\cos\theta)$$

La segunda ecuación de Newton cuando la masa esta en la posición del ángulo θ:



Con $a_c = \frac{v^2}{R}$:

$$N - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}$$

La masa deja la superficie esférica cuando:

$N = 0$

$$mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R} = \frac{mgR(2 - 2\cos\theta)}{R}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{v^2}{Rg} = 2 - 2\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \theta = 48{,}2^{\circ}$$

Ejemplo 18. Fuerza de un resorte: Se jala una masa a sujeta a un resorte de constante *k* sobre una superficie sin fricción, desde la posición de equilibrio *x* = 0 hasta una distancia *L* y se suelta.
A una distancia *x* de la posición de equilibrio la velocidad de la masa es *v*.

Su energía potencial es $U = \frac{1}{2}kx^2$

Su energía cinética es $K = \frac{1}{2}mv^2$

Su energía mecánica total es:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Para $x = L$, $v = 0$

$$E = 0 + \frac{1}{2}kL^2 = \frac{1}{2}kL^2$$

Para $x = 0$, $v = v_0$

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

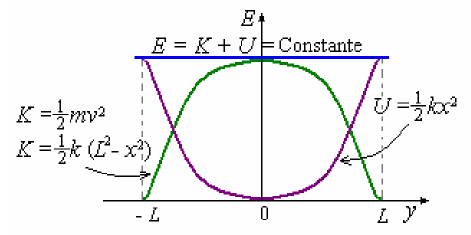
Para cualquier instante

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kL^2$$

De aquí: $v^2 = \frac{k}{m}\left(L^2 - x^2\right)$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}\left(L^2 - x^2\right)}$$

El gráfico de la variación de la energía potencial y cinética es:



Ejemplo 19. Calcular la velocidad necesaria para que una partícula pueda escapar de la atracción de la tierra. La energía total *E* de una partícula de masa *m* que está a una distancia *r* del centro de la tierra y que tiene una velocidad *v* es:

$E = K + U$, donde $K = \frac{1}{2}mv^2$ y

$$U = -G\frac{mM}{r}$$

Luego: $E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = \text{Constante}$

Si la partícula escapa de la atracción de la tierra y se sitúa a una distancia infinita de ésta su potencial es cero.

$$r \to \infty\ , U_\infty = -G\frac{mM}{r} \to 0$$

En esta región con la velocidad menor posible

$v_\infty = 0$ Tenemos $K_\infty = 0$

Luego: $E = K + U = 0$

Como *E* es constante $\Rightarrow E = 0$

La energía *E* de la partícula en la superficie de la tierra con la velocidad v_e para que pueda escapar:

$$E = \frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{mM}{R} = 0$$

$$\Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Como en la superficie de la tierra

$$F = -G\frac{mM}{R^2} = -mg \Rightarrow g = \frac{GM}{R^2}$$

Tenemos: $v_e = \sqrt{2gR}$

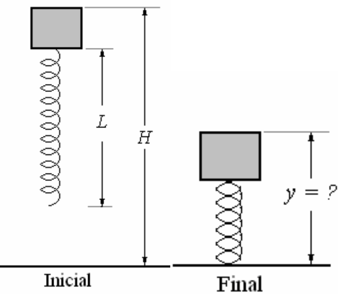
Siendo

$$g = 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ y } R = 6{,}4\times 10^6\text{m}$$

Obtenemos; $v_e = 1{,}12\times 10^4\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

Ejemplo 20. Se tiene un resorte de longitud *L* y constante *k* conectado a la base de un bloque de masa *m*, Se suelta el bloque desde la altura *H*. ¿Cuál será la distancia mas cercana al piso que alcanzará el bloque antes de rebotar?

Solución.



En el instante inicial la energía es solamente la potencia1 gravitatoria es $U = mgH$, la energía cinética es cero, tal que la energía total es $E = mgH$.

En el instante final: La energía potencial es la correspondiente a la masa a una altura *y*, más la del resorte comprimido una longitud $(L - y)$, es decir:

$$U = U_g + U_r = mgy + \frac{1}{2}k(L-y)^2$$

Como en ese instante ha cesado el movimiento, la energía cinética es cero,

La energía total es:

$$E = mgy + \frac{1}{2}k(L-y)^2$$

Por la conservación de la energía

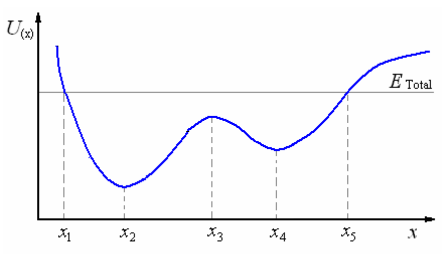
$$mgH = mgy + \frac{1}{2}k(L-y)^2$$

La solución de esta ecuación es:

$$y = -\left(\frac{mg}{R} - L\right) \pm \frac{mg}{k}\left[1 + \frac{2k}{mg}(H-L)\right]$$

Siendo el valor positivo de *y* la solución significativa.

Ejemplo 21. El gráfico de la figura muestra la función potencial y la energía total de un movimiento. ¿Qué podemos decir acerca del movimiento?



Solución.

Velocidad de la partícula:

Tenemos que

$$E_{Total} = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U_{(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = E - U_{(x)} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{(x)}\right)}$$

La energía cinética:

- Es igual a cero en x_1 y x_5.
- Tiene su valor máximo donde $U_{(x)}$ es mínimo, el punto x_2

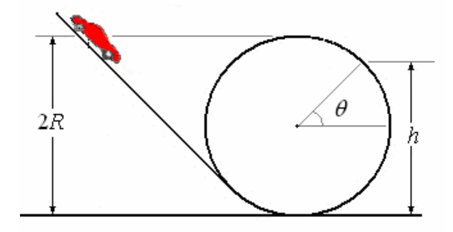
La partícula se mueve entre x_1 y x_5, fuera de estos valores la velocidad sería imaginaria.

Como $F_x = -\dfrac{dU_{(x)}}{dt}$, la pendiente del gráfico de $U_{(x)}$ en determinado punto corresponde a La fuerza actuante, tal que la fuerza se hace cero donde la pendiente es cero, como en x_2, x_3 y x_4.

La fuerza es positiva entre x_1 y x_2.entre x_3 y x_4. La fuerza es negativa entre x_2 y x_3, entre x_4 y x_5.

Los puntos en que *U* es mínimo, son posiciones de equilibrio estable, como son x_2 y x_4.

Ejemplo 22. En la figura, un auto de juguete de masa *m* se libera del reposo en la pista circular. ¿Si se suelta a una altura 2*R* sobre el piso, ¿cuán arriba sobre el piso estará cuando sale de la pista, desprecie la fricción?



Solución.

En la figura de arriba:

$$h = R(1 + \text{sen}\,\theta)$$

Despreciando las pérdidas por fricción la energía total es constante, de tal manera que:

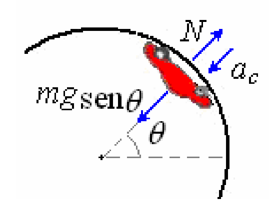
Siendo *v* la velocidad del auto a la altura *h*.

$$mg(2R) = mg(h) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$mg(2R) = mgR(1 + \text{sen}\,\theta) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$gR = gR\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}v^2 \quad (1)$$

Aplicando la segunda ley de Newton en la altura h:



$$mg\text{sen}\,\theta - N = ma_c$$

N = 0, condición de caída.

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Luego:

$$mg\text{sen}\,\theta = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow$$

$$v^2 = gR\text{sen}\,\theta \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$gR = gR\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}gR\text{sen}\,\theta \Rightarrow$$

$$gR = \frac{3}{2}gR\text{sen}\,\theta \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{2}{3}$$

Finalmente:

$$h = R(1 + \text{sen}\,\theta) = R\left(1 + \frac{2}{3}\right)$$

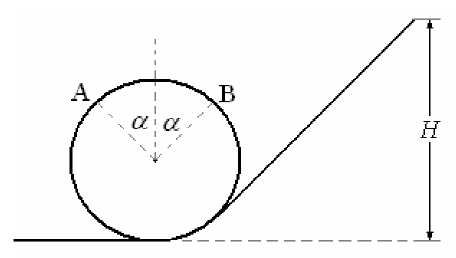
$$= \frac{5}{3}R = 1{,}67\, R$$

Ejemplo 23. Una masa pequeña resbala sobre una superficie inclinada pasando por un rizo de radio R.

a) ¿Cuál es la altura mínima H de la que debe soltarse a fin de que el cuerpo no deje la superficie interior del rizo al dar la vuelta?

b) ¿Con que velocidad llega la masa al punto A?

c) ¿Cuál es el valor del ángulo α, con el que se puede retirar el segmento $\overset{\frown}{AB}$ de la circunferencia de tal modo que la masa que sale de A alcance el punto B después de viajar una cierta distancia en el aire.



Solución.

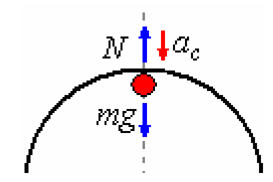
a) Siendo v la velocidad de la masa en la parte superior del rizo.

Por conservación de la energía:

$$mg(H) = mg(2R) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$gH = 2gR + \frac{1}{2}v^2 \quad (1)$$

Aplicando la segunda ley de Newton en ese punto:



$$mg - N = ma_c$$

N = 0, condición de caída.

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Luego:

$$mg = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow$$

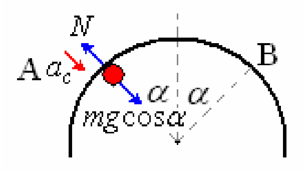
$$v^2 = gR \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$gH = 2gR + \frac{1}{2}gR \Rightarrow$$

$$H = \frac{5}{2}R \Rightarrow H = 2{,}5R$$

b) Sea v la velocidad en el punto A su altura es $h = R(1 + \cos\alpha)$



Por conservación de la energía:

$$mg(H) = mgR(h) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

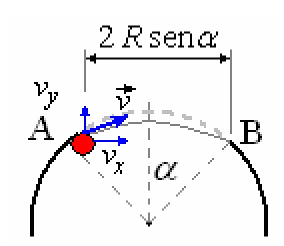
$$mg(2{,}5R) = mgR(1 + \cos\alpha) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$v^2 = 2g(2{,}5R) - 2gR(1 + \cos\alpha) \Rightarrow$$

$$v^2 = 3gR - 2gR\cos\alpha \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{gR(3 - 2\cos\alpha)}$$

c) La masa sale del punto A, como un proyectil con velocidad inicial $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$



En el tiempo t de su recorrido vertical debe alcanzar al punto B.
Recorrido vertical:

$$y = v\text{sen}\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

Cuando llega a B, $y = 0$:

$$0 = v\text{sen}\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \frac{2v}{g}\text{sen}\alpha$$

Su recorrido horizontal es

$$x = v_x t = v\cos\alpha t$$

Para $t = \frac{2v}{g}\text{sen}\alpha$ debe de estar en B, luego:

$$2R\text{sen}\alpha = v\cos\alpha\left(\frac{2v}{g}\text{sen}\alpha\right) \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{gR}{\cos\alpha}$$

Igualando esta expresión de la velocidad con la encontrada anteriormente:

$$gR(3 - 2\cos\alpha) = \frac{gR}{\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$\cos^2\alpha - \frac{3}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2} = 0$$

Resolviendo:

$$\cos\alpha = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$$

En nuestro caso tomamos la solución ½, con la que obtenemos $\alpha = 60^\circ$

Ejemplo 24. Un arco del tiro al arco ejerce la fuerza *kx* de la ley de Hooke en una flecha cuando la cuerda se jala una distancia *x*. Se supone que un arquero ejerce una fuerza de 220 N jalando a la flecha una distancia de 64 cm.
a) ¿Cuál es la constante del resorte del arco?
b) ¿Cuál es la velocidad de una flecha de masa 24 g cuando deja el arco?



Solución.

a) $k = \frac{F}{x} = \frac{220}{0{,}64}$ = 344 N/m

b) $U_1 + K_1 = U_2 + K_2$

$$\frac{1}{2}kx^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}}x$$

$$v = \sqrt{\frac{344}{0{,}024}}(0{,}64) = 76{,}6 \text{ m/s}$$

Ejemplo 24. Puenting. Un saltador que pesa 800 N se ata con una cuerda elástica al tobillo y se salta de una torre alta. La cuerda tiene una longitud si estirar de 30 m, y un extremo se une al punto donde el salto comienza. ¿La constante del resorte de la cuerda elástica es 200 N/m. ¿Cuánto recorrerá el saltador antes de que la cuerda detenga su descenso?



Solución.
Sea el punto más bajo del salto $h = 0$. La energía cinética inicial y la energía cinética en el punto más bajo son ambas igual a cero.
Tal que por la conservación de la energía:

$$mgh = 0 + \frac{1}{2}kx^2, \text{ donde } x = h - 30.$$

Sustituyendo
mg = 800 N y k = 200 N/m, y resolviendo:

$$h^2 - 68h + 900 = 0 \Rightarrow$$

$$h = 68 \pm \sqrt{(68)^2 - 4(900)} = 50 \text{ m, o } 18 \text{ m.}$$

La solución correcta es h = 50 m. La solución h = 18 m corresponde al rebote que comprime la cuerda “amortiguador auxiliar”, pero una cuerda no se comprime como un resorte.

Ejemplo 25. En la figura mostrada, el hombre y la plataforma tienen una masa *m*, el hombre se eleva una distancia *h* tirando la cuerda del lado derecho.
a) ¿En cuánto aumenta su energía potencial gravitatoria?
b) ¿Qué fuerza debe ejercer para elevarse?
c) ¿Qué longitud de cuerda debe tirar para llegar a la posición superior?
d) ¿Despreciando el rozamiento ¿Qué trabajo habrá realizado?

Solución.

a) La energía potencial gravitatoria es

$$U_{(y)} = mgy + C$$

Para la posición inicial

$$U_1 = mgy_1 + C$$

Para la posición final

$$U_2 = mgy_2 + C$$

El aumento de la energía potencial gravitatoria es:

$$U = U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1) = mgh$$

b) La fuerza para elevar el sistema, siendo esta conservativa,

$$F = -\frac{\partial U}{\partial y} = -mg$$

Como la polea divide en dos, la fuerza F_h que debe ejercer el hombre es: $F_h = \dfrac{mg}{2}$.

c) Para llegar a la posición superior la cuerda debe ser tirada en una longitud dos veces *h*
d = 2*h*.

d) EL trabajo realizado por el hombre es:

$$W_h = F_h d = \left(\frac{mg}{2}\right)(2h) = mgh$$

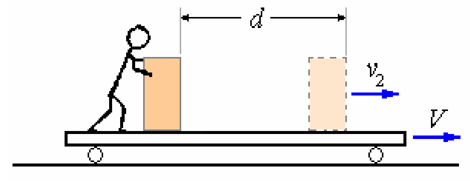
Justamente igual al cambio de energía.

Ejemplo 26. Observadores en movimiento relativo. Sobre una plataforma en movimiento horizontal con una velocidad constante *V*. un hombre empuja una caja de masa *m* con una fuerza *F* una distancia *d* partiendo del reposo. Demostrar la validez de la conservación de la energía desde los puntos de vista de observadores en marcos inerciales diferentes.

Solución.

Las leyes de Newton se cumplen sólo en marcos de referencia inerciales. Si se cumplen en uno en particular entonces se cumplen en todos los marcos de referencia que se muevan a velocidad constante en relación a este mareo.

a) Observador en la plataforma.



El observador en la plataforma ve que la caja, de masa *m*, se mueve bajo la acción de la fuerza *F*. El trabajo realizado para mover la distancia *d* es:

$$W = Fd$$

La aceleración de la caja es $a = \dfrac{F}{m}$

Como la caja parte del reposo su velocidad en la posición final es:

$$v_2 = \sqrt{2ad} = \sqrt{\frac{2Fd}{m}}$$

El observador determina que el cambio de energía:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Como $v_1 = 0$ y $v_2 = \sqrt{\dfrac{2Fd}{m}}$

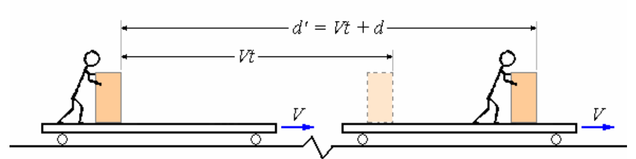
$$\Delta K = \frac{1}{2}m\left(\frac{2Fd}{m}\right) = Fd$$

El observador sobre la plataforma concluye que:

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\left(\frac{2Fd}{m}\right) = Fd$$

$$W = \Delta K$$

b) Observador situado en tierra:



El observador en tierra ve que la caja se mueve bajo la acción de la fuerza *F*, en este caso la caja se mueve la distancia $d' = Vt' + d$,. Siendo *t* el tiempo que demora el recorrido de la distancia *d* sobre la plataforma,

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2dm}{F}}, \text{ luego } d' = V\sqrt{\frac{2dm}{F}} + d$$

El trabajo es:

$$W' = Fd' = F\left(V\sqrt{\frac{2dm}{F}} + d\right)$$

$$W' = Fd + V\sqrt{2Fdm}$$

El observador ve que la caja tiene una velocidad inicial

$$v'_1 = V$$

y una velocidad final

$$v'_2 = V + v_2 = V + \sqrt{\frac{2Fd}{m}}$$

El observador en tierra determina que el cambio de energía es:

$$\Delta K' = K'_2 - K'_1 = \frac{1}{2}mv'^2_2 - \frac{1}{2}mv'^2_1$$

$$\Delta K' = \frac{1}{2}m\left(V + \sqrt{\frac{2Fd}{m}}\right)^2 - \frac{1}{2}mV^2$$

$$\Delta K' = Fd + V\sqrt{2Fdm}$$

Aquí se cumple también la conservación de la energía:

$$W' = \Delta K'$$

SISTEMAS NO CONSERVATIVOS.
Supongamos que también intervienen fuerzas no conservativas, como la fricción.

El trabajo total para mover la partícula de r_1 a r_2 es

$$W_{12} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = K_2 - K_1$$

Este trabajo es también igual a la suma del trabajo realizado por las fuerzas conservativas y del trabajo realizado por las fuerzas no conservativas, es decir:

$$W_{12} = W_{12\,\text{CONSERVATIVAS}} + W_{12\,\text{NO CONSERVATIVAS}}$$

Como:

$$W_{12\,\text{CONSERVATIVAS}} = U_1 - U_2$$

$$W_{12} = U_1 - U_2 + W_{12\,\text{NO CONSERVATIVAS}}$$

De las expresiones de trabajo total tenemos:

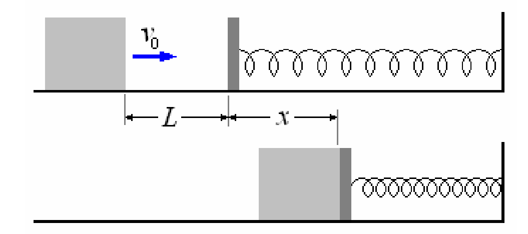
$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2 + W_{12\,\text{NO CONSERVATIVAS}}$$

$$\Rightarrow (K_2 - U_2) - (K_1 - U_1) = W_{12\,\text{NO CONSERVATIVAS}}$$

$$E_2 - E_1 = W_{12\,\text{NO CONSERVATIVAS}}$$

A diferencia que en un Sistema conservativo, no es igual a cero.
Esta última expresión nos permite calcular el trabajo de fuerzas no conservativas, fuerzas que en general son complicadas y que en principio deberíamos de calcular resolviendo integrales curvilíneas.

Ejemplo 27. A un bloque de masa *m* se le da un empujón tal que adquiere la velocidad v_0 a lo largo del eje *x*. Después de resbalar distancia *L* golpea un resorte de constante *k*. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y la masa es μ. ¿Cuánto se comprime el resorte?
Solución.



Sea *x* La longitud que se comprime el resorte.
La distancia recorrida por la masa es
$(L + x)$.

La energía inicial es solo la energía cinética de la masa:

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2$$

La energía final es solo la energía potencial del resorte:

$$E_f = \frac{1}{2}kx^2$$

El trabajo hecho por la fricción

$$W_f = \int_{x_1}^{x_2} F_f\,dx,\ x_1 = 0,\ x_2 = L + x,$$

$$F_f = -\mu N = -\mu mg$$

Luego:

$$W_{12} = \int_0^{L+x} (-\mu mg)\,dx = -\mu mg(L + x)$$

Como en un Sistema no Conservativo.

$$W_{12\,\text{NO CONSERVATIVAS}} = E_2 - E_1$$

$$-\mu mg(L + x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Ecuación de segundo grado cuya solución es:

$$x = -\frac{\mu mg}{k} \pm \sqrt{\frac{\mu^2 m^2 g^2}{k^2} - \frac{m}{k}\left(2\mu gL - v_0^2\right)}$$

Ejemplo 28. Un cuerpo de masa 10 kilogramos cae desde una altura de 15 metros y alcanza el suelo en 2 segundos. Considerando constante la fuerza de resistencia del aire.
a) ¿Cuál era la magnitud de la fuerza de resistencia?
b) ¿Cuánta energía mecánica se ha perdido?
c) ¿Qué velocidad tenía el cuerpo inmediatamente antes de chocar Contra el suelo?
Solución.
a) Siendo el peso y la fuerza de resistencia del aire las fuerzas que intervienen y siendo ambas constantes tenemos que la aceleración a del cuerpo es constante.

Como $h = \frac{1}{2}at^2$

La aceleración es $a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2(15)}{2^2} = 7,5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$mg - F_g = ma$$

$$F_g = m(g - a) = 10(9,8 - 7,5) = 23\ \text{N}$$

b) La energía que se ha perdido es el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas.

$$W_{\text{NO CONSERVATIVAS}} = F_g d = (23)(15) = 345\ \text{J}$$

c) Como $W_{\text{NO CONSERVATIVAS}} = E_2 - E_1$

Siendo

$$E_1 = K_1 + U_1 = 0 + mgh = (10)(9,8)(15)$$
$$= 1470\ \text{J}$$

$$E_2 = K_2 + U_{21} = \frac{1}{2}mv_2^2 + 0 = 5v_2^2$$

Tenemos:

$$5v_2^2 - 1470 = 345 \Rightarrow v_2^2 = \frac{1470 - 345}{5} = 225$$

Finalmente: $v_2 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Una manera directa de llegar al mismo resultado es considerar que la aceleración efectiva de salida es $a = 7{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, la velocidad después de 2 segundos es:

$$v_2 = at = \left(7{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA Y LA FRICCIÓN

La ley de la conservación de la energía se puede aplicar a los sistemas donde las fuerzas no conservativas como actúan las fuerzas de la fricción. Si un sistema trabaja contra la fricción, la energía mecánica del sistema disminuirá.

Así si W_f es el trabajo hecho contra la fricción, entonces energía inicial - la energía perdida por la fricción

$$E_1 - W_f = E_2$$

$$U_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 - W_f = U_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

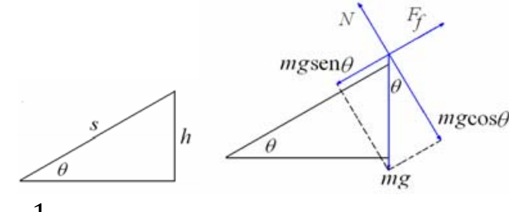
Ejemplo 29. Cerca de Lewiston, Idaho, hay una carretera muy inclinada donde circulan camiones cargados con madera. Han ocurrido varios accidentes serios cuando los carros perdieron sus frenos yendo para abajo de la colina a gran velocidad. Se han construido rampas de contención que se espera puedan detener a los vehículos sin frenos. Suponga que un carro que viaja a 40 m/s encuentra una rampa inclinada para arriba 30º sobre horizontal. La grava floja en la rampa proporciona una fuerza friccional para ayudar a detener al carro mientras sube la rampa. La grava tiene un coeficiente eficaz de fricción de 0,50. ¿Cuán lejos a lo largo de la rampa el carro viajaría antes de detenerse?

Solución.

$N = mg \cos \theta$

$$F_f = \mu N = \mu mg \cos\theta$$

$$U_1 + K_1 - W_f = U_2 + K_2$$



$$0 + \frac{1}{2}mv^2 - F_f s = mgh + 0 \qquad h = s\,\text{sen}\theta$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - (\mu mg \cos\theta)s = mgs\,\text{sen}\theta$$

$$s = \frac{v^2}{2g(\text{sen}\theta + \mu\cos\theta)}$$

$$= \frac{(40)^2}{2(9{,}8)(\text{sen}30^\circ + 0{,}5\cos 30^\circ)} = 87{,}5 \text{ m}$$

POTENCIA

Tan importante como saber cual es el trabajo realizado es conocer también la rapidez con la cual se realiza. Para proporcionar una medida cuantitativa de este concepto que incluye tanto el trabajo como el tiempo necesario para realizarlo se tiene a la Potencia.

La potencia mide la rapidez con la que el trabajo se está realizando.

Si se realiza un trabajo *W* en un intervalo de tiempo (de t_1 a t_2) **la Potencia media** es:

$$P_m = \frac{W_{12}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Cuando $t_2 \to t_1$, $\Delta t \to 0$, tendremos

La Potencia instantánea en el instante *t*.

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

También como

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Tenemos

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

El análisis dimensional

$$[P] = [F][L][T]^{-1} = [M][L]^2[T]^{-1}$$

Su unidad en el sistema internacional es J/s llamado Watt ó Vatio cuyo símbolo es W.

Un múltiplo muy usado es el kilowatt (kW)

1 kW = 10^3 W

Existe una unidad de energía o trabajo en términos de la unidad de potencia el kilowatt-hora (kwh), es la energía convertida o consumida en una hora a una razón constante de 1 kW.

1 kWh (10^3W)(3600s) = 3,6 x 10^6 .J

Para tener una idea de cuanto es 1 Watt, imaginemos que tenemos que levantar una masa de 50 kg. a una altura de 1 metro, cada 5 minutos y realizar este trabajo durante una jornada de 8 horas. Si levanta cada 5 minutos, serán 12 veces por hora, siendo 8 horas por día, hará un total de 12 x 8 = 96 veces al día.

El trabajo realizado es:

$$W = 96mgh$$

$$= 96(50\text{Kg})(9{,}8\text{m/s})(1\text{m}) = 47040 \text{ J}$$

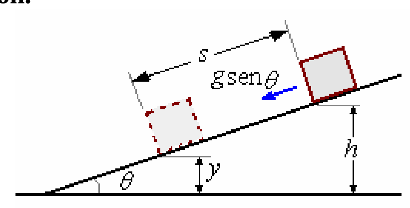
Para determinar la potencia tenemos que dividirlo por el número de segundos en un día.

$$P = \frac{47040\text{J}}{8\times 3600s} = 1{,}63 \text{ W}$$

Comparemos esta potencia con la potencia de un motor pequeño de 1 hp (horse power).
El hp es la unidad de potencia en el sistema inglés
1 hp = 746 W

Ejemplo 30. Si un objeto que parte del reposo se desliza por un piso liso inclinado un ángulo θ con respecto a la horizontal de altura *h*, hallar la potencia *P* gastada por la gravedad en función de la posición *y* del objeto con respecto a la parte inferior plano inclinado.

Solución.



La potencia es:

$$P = \frac{dW}{dt}, \text{ siendo } W = Fd$$

Con

$$F = mg\,\text{sen}\theta \text{ y } d = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}g\,\text{sen}\theta\, t^2$$

Tenemos

$$W = (mg\,\text{sen}\theta)\left(\frac{1}{2}g\,\text{sen}\theta\, t^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}mg^2\text{sen}^2\theta\, t^2 \text{ y}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mg^2\text{sen}^2\theta\, t^2\right)$$

$$= mg^2\text{sen}^2\theta$$

Como ha recorrido la distancia *s*:

$$s = \frac{(h-y)}{\text{sen}\theta} = \frac{1}{2}g\text{sen}\theta\, t^2$$

Obtenemos:

$$t = \sqrt{\frac{2(h-y)}{g\text{sen}^2\theta}}$$

Luego

$$P = mg^2\text{sen}^2\theta\sqrt{\frac{2(h-y)}{g\text{sen}^2\theta}}$$

$$= mg\text{sen}\theta\sqrt{2g(h-y)}$$

Otra manera de obtener es considerar que:

$$P = Fv$$

Donde

$$F = mg\,\text{sen}\theta \text{ y } v = at = g\text{sen}\theta\, t$$

Luego: $P = (mg\,\text{sen}\theta)(g\,\text{sen}\theta\, t)$

$$= mg^2\,\text{sen}^2\theta\, t$$

Como $t = \sqrt{\dfrac{2(h-y)}{g\text{sen}^2\theta}}$

Obtenemos:

$$P = mg^2\text{sen}^2\theta\sqrt{\frac{2(h-y)}{g\text{sen}^2\theta}}$$

$$= mg\text{sen}\theta\sqrt{2g(h-y)}$$

Ejemplo 31. El flujo de agua de un río es de 50 m^3 por segundo, se tiene un desnivel de 200 metros y se quiere aprovechar construyendo una hidroeléctrica
a) Si la energía del agua que cae se utilize totalmente ¿Que potencia se podría obtener?
b) Si toda la energía procedente de la caída del río se convirtiese en energía eléctrica y se vendiese a un sol el kilowatt-hora ¿Cuánto dinero se cobraría en un día?

Solución.

a) El trabajo realizado por una masa *m* que cae desde una altura *h* es:

$W = mgh$

Como $m = \rho V$,

Donde ρ es la densidad del agua. *V* es el volumen.

$$W = \rho Vgh$$

La potencia que se obtiene al pie de la salida es

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\rho Vgh$$

De estas cantidades la que varía con el tiempo es *V*.

$$\frac{dV}{dt} = 50\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Luego

$$P = \rho gh\frac{dV}{dt}$$

Como

$$\rho = 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3},\ g = 9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2},\ h = 200\text{m}$$

Obtenemos

$$P = \left(1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(200\text{m})\left(50\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right)$$

$$= 9{,}8 \times 10^7 \text{ W}$$

b) Si tenemos una potencia $P = 9{,}8 \times 10^7 = 9{,}8 \times 10^4$ kW y consideramos que se consume las 24 horas del día. La energía obtenida es igual a todo el trabajo realizado.

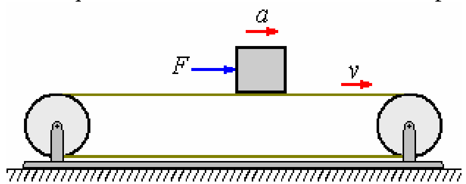
$$dW = Pdt$$

$$W = P\int_{t_1}^{t_2} dt = P(t_2 - t_1) = P\Delta t$$

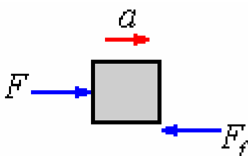
$$W = (9{,}8\times 10^4 kW)(24h) = 235{,}2 \times 10^4 \text{ kW-h}$$

si el precio de cada kW-h es 1 sol, cada día se obtendrán 2,352 millones de soles.

Ejemplo 32. En la figura, un bloque de masa *m* descansa sobre una faja que se mueve con velocidad constante *v*. El coeficiente de fricción entre el bloque y la faja es μ_k.
Tomando como tiempo inicial $t = 0$, una fuerza horizontal *F* aplicada al bloque le produce una aceleración constante *a*.
a) Determinar la fuerza *F* y la potencia disipada en fricción como función del tiempo.
b) Si la fuerza *F* es ejercida por un hombre que se encuentra sobre la faja. Determinar la potencia que este libera en función del tiempo.
e) Si la fuerza *F* es ejercida por un hombre que camina sobre el piso al costado de la faja. Determinar la potencia que este libera en función del tiempo.



Solución.
a) Aplicando la segunda ley de Newton a la masa *m* en la figura



$$F - F_f = ma$$

Como $F_f = \mu_k N = \mu_k mg$, obtenemos:

$$F = ma + \mu_k mg$$

y la potencia disipada en fricción es

$$P = F_f v_0 = (\mu_k mg)v_0 \text{, siendo } v_0 = at$$

$$P = \mu_k mgat$$

b) La fuerza que hace el hombre sobre la faja es

$$F = ma + \mu_k mg$$

Su velocidad en función del tiempo es

$$v' = v + v_0 = v + at$$

y la potencia que debe dar el hombre es

$$P = Fv' = (ma + \mu_k mg)at$$

c) La tuerza que hará el hombre sobre el piso es igual al caso anterior:

$$F' = ma + \mu_k mg$$

La velocidad del hombre en función del tiempo en este caso es:

$$v' = v + at$$

Luego la potencia que debe dar el hombre es:

$$P' = F'v' = (ma + \mu_k mg)(v + at)$$

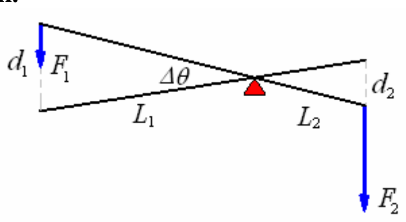
MÁQUINAS
Una máquina simple es un dispositivo usado para magnificar una fuerza o para cambiar una desplazamiento pequeño en grande. Las máquinas comunes son la palanca, el plano inclinado, el gato hidráulico, o una combinación de engranajes.
El trabajo se hace típicamente en la máquina (el trabajo W_1 de entrada), y entonces la máquina alternadamente hace un cierto trabajo W_2 de salida. El estado de la energía de la máquina no cambia apreciable durante este proceso, así que si la fricción es insignificante, $W_1 = W_2$, basado en la idea de la conservación de energía. Muy a menudo las fuerzas de entrada y de salida son constantes, en las cuales el caso $W_1 = W_2$, lo que lleva a:

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \Rightarrow F_2 = \frac{d_1}{d_2} F_1$$

Aquí F_1 actúa sobre una distancia d_1 y F_2 actúa sobre una distancia d_2. La ventaja mecánica de la máquina se define como

$$\text{VM} = \frac{F_2}{F_1}$$

Ejemplo 33. La palanca de barra es un dispositivo usado para levantar objetos pesados (por ejemplo, un piano o una pieza grande de maquinaria). Consiste en una barra larga que se apoya en un fulcro una distancia corta del extremo de levantar de la barra.
Suponga que el fulcro de una barra de la palanca está a 3 centímetros de la carga, y el punto donde usted empuja hacia abajo en el otro extremo está a 1,50 m del fulcro.
¿Qué fuerza mínima tendría que ejercer para levantar una carga de 2000 N?
¿Si mueve el extremo de la barra 4 centímetros hacia abajo, cuánto levantará la carga?
Solución.



Si la barra rota con un ángulo pequeño $\Delta\theta$, entonces

$$d_1 = L_1 \Delta\theta \text{ y } d_2 = L_2 \Delta\theta$$

$$F_1 L_1 \Delta\theta = F_2 L_2 \Delta\theta$$

$$F_1 = \frac{L_2}{L_1} F_2 \Rightarrow$$

$$F_1 = \frac{(0{,}03)}{1{,}50}(2000)$$

$= 40$ N

Para triángulos semejantes

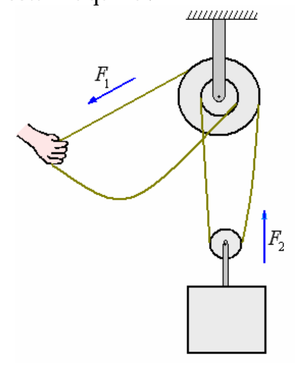
$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{L_1}{L_2} \quad d_2 = \frac{L_2}{L_1} d_1 \Rightarrow$$

$$d_2 = \frac{(0{,}03)}{L(1{,}50)}(0{,}04)$$

= 0,008 m = 8 mm.

Observe que una fuerza pequeña de entrada da lugar a una fuerza grande de salida, pero el precio que se paga es que un desplazamiento grande de la entrada produce solamente un desplazamiento pequeño de salida.

Ejemplo 34. Se bosqueja aquí un polipasto diferenciado de la clase usada para levantar un motor de auto. Las poleas tienen dientes que engranan con una cadena continua. Las poleas están soldadas juntas, hay 18 dientes en la polea externa y 16 dientes en la polea interna. Así cuando la polea hace una revolución, 18 acoplamientos de la cadena se levantan y 16 acoplamientos bajan, dando por resultado la elevación de la carga. ¿Cuál es la ventaja mecánica de esta máquina?



Solución.

Considere qué pasa cuando la polea superior hace una revolución, es decir, cuando el trabajador jala 18 eslabones de la cadena hacia él con fuerza F_1.

Sea L = longitud de un eslabón.

El trabajo de la entrada es $W_1 = F_1(18\,L)$.

El lazo de la cadena que va bajo de la carga es acortado así por 18 eslabones y alargado por 16 eslabones, con un acortamiento neto de $18L - 16L = 2L$ que acorta al lazo $2L$ y levanta la carga L (intente esto con un pedazo de cuerda para convencerse de esta característica).

Así el trabajo de la salida es $W_2 = F(L)$.

Despreciando la fricción.

$W_1 = W_2$ o $F_1(18\,L) = F_2(L)$

La ventaja mecánica del polipasto es VM = 18.

Ejemplo 35. Un trailer está equipado de un sistema para sacar barcos del agua. Consiste en una manija larga de 30 centímetros unido al eje de un engranaje pequeño con 12 dientes. Este engranaje pequeño endienta con un engranaje más grande con 36 dientes. Se une a este engranaje grande un tambor del radio 2 centímetros en el cual se enrolla la línea atada al barco (la línea es una cuerda.)

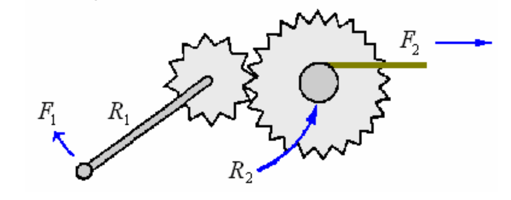
¿Qué tensión se puede aplicar a la línea cuando la manivela se empuja con una fuerza de 80 N?

So1ución.

Considere que pasa cuando la manivela hace una revolución. La mano mueve una distancia $d_1 = 2\pi R_1$.

El engranaje grande mueve 12/36 = 1/3 revoluciones.

La línea es jalada una distancia $d_2 = 2\pi R_2/3$.



$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \Rightarrow$$

$$F_2 = \frac{d_1}{d_2}F_1 = \frac{2\pi R_1}{2\pi R_2/3}F_1 = 3\frac{R_1}{R_2}F_1$$

$$F_2 = 3\left(\frac{30}{2}\right)(80) = 3600 \text{ N.}$$

La ventaja mecánica:

$$\text{VM} = \frac{3600}{80} = 45$$

La ventaja mecánica del torno (despreciando la fricción) es 45.

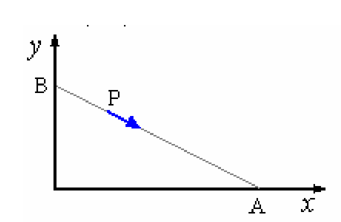
PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1 Defina primero en palabras y luego en una expresión matemática.

a) El trabajo realizado por una fuerza cualquiera.

b) La energía cinética de una partícula.

2 Una partícula P en el plano *xy* está sometida a la acción de la fuerza $\vec{F} = y^2\hat{i} - x^2\hat{j}$. Calcular el trabajo efectuado por la fuerza para desplazar P sin fricción desde B (0,.*b*) a A (*a*, 0).



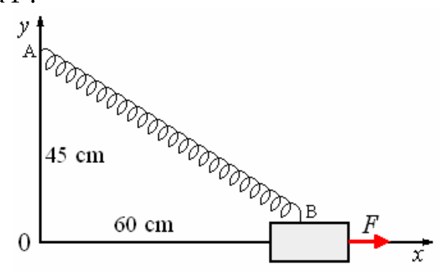
Respuesta. $W = \frac{ab}{3}(a+b)$

3. Un depósito cilíndrico de altura *H* tiene una masa *m* de agua que lo llena hasta la mitad, que ha de bombearse en su totalidad por encima del borde del mimo. ¿Cuánto trabajo ha de realizar la bomba?

Respuesta. $\Delta W = \frac{3}{4} mgH$

4. ¿Qué fuerza horizontal, constante debe aplicarse a un carro de masa 500 kg que viaja en una carretera horizontal a 36 km/h para que se detenga en 30 metros? ¿Quién proporciona la fuerza?
Respuesta. 2500 N, proporcionada por la carretera.

5. Un resorte está unido en A a un plano vertical fijo y a un bloque B que resbala sobre una varilla lisa horizontal O*x*. La longitud del resorte no estirado es 45 cm y la constante del resorte es k = I000 N/m. ¿Cuál es el trabajo realizado por el resorte sobre B cuando se mueve 60 cm desde O por efecto de la fuerza *F*?

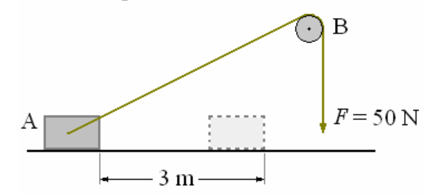


Respuesta: 99,38 J

6. Un resorte de masa despreciable y constante *k* cuelga del cielorraso de un ascensor y lleva suspendido una masa *in*. Cuando el ascensor se mueve hacia arriba durante *t* segundos con una aceleración uniforme $a = \frac{1}{2} g$. la reacción inercial hace que el resorte se alargue.
a) ¿Cuánto trabajo realiza el ascensor sobre el sistema resorte-masa?
b) ¿Cuánto trabajo realiza sobre el resorte?

Respuesta. a) $\frac{1}{4} mg^2 t^2$ b) $\frac{1}{8}\frac{m^2 g^2}{k}$

7. En la figura se mueve el cuerpo A a lo largo de un plano horizontal liso por medio de la fuerza constante *F* = 5º N aplicada al extremo de una cuerda unida a A y que pasa por una pequeña polea sin rozamiento en B. Calcular el trabajo realizado sobre A por la cuerda mientras A se desplaza 3 m,



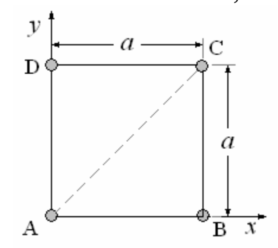
Respuesta. *W* = 120 J

8. Una fuerza cuya magnitud varía con *x* de acuerdo a $F = A + Bx$ actúa sobre objeto que puede moverse solamente en el eje *x*. El ángulo con el que actúa la fuerza también varía tal que $\cos\theta = 1 - x^2$. El objeto se mueve entre $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.
¿Cuál es el trabajo realizado cuando el objeto se mueve de *x* = 0 a *x* = *a*?

Respuesta. $Aa + B\frac{a^2}{2} - B\frac{a^4}{4}$

9. Un bloque que se mueve a lo largo del eje *x* comienza del reposo en *x* = *A* y se mueve a *x* = *B* luego vuelve a *x* = *A* donde queda en reposo nuevamente. Si una de las fuerzas actuante sobre el bloque es opuesta en dirección y proporcional a la magnitud de la velocidad, tal que $\vec{F}_v = -b\vec{v}$ con *b* Constante. Demostrar que el trabajo realizado por esta fuerza no es cero para una trayectoria cerrada.

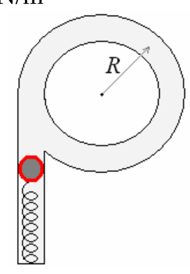
10. La fuerza $\vec{F} = x^2 y\hat{i} + xy^2\hat{j}$ actúa sobre la partícula .P (*x*,*y*) que se mueve en el plano *xy*.
a) Demostrar que *F* no es una fuerza conservativa.
b) Determinar el trabajo de *F* cuando se mueve de A a C, a lo largo de los caminos ABC, ADC y AC.



Respuesta. a) Si $\frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$, b) $W_{ABC} = \frac{a^4}{3}$,

$W_{ADC} = \frac{a^4}{3}$. $W_{AC} = \frac{a^4}{2}$

11. El tubo de la figura se halla en un plano horizontal, su resorte comprimido inicialmente 10 cm.. y al dispararse una bolita entra en una canaleta circular de radio *R*, la fricción es constante igual a 1 Newton. ¿Cuántas vueltas dará la bolita antes de detenerse?
R= 50 cm *k* = 62 N/m

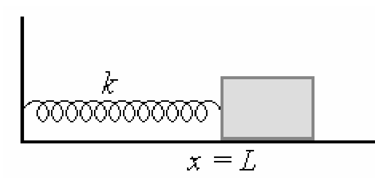


Respuesta. Una vuelta.

12. Se aplica una fuerza de 1 N a una partícula de 50 g que está inicialmente en reposo sobre una superficie.

a) ¿Cuánto trabajo realiza sobre la partícula en l0 s si la superficie es lisa y la fuerza es horizontal?
b) El mismo caso de a) pero la fuerza hace un ángulo de 60º con la horizontal.
c) El caso b) pero con rozamiento entre la partícula y la superficie 0,25 y ¿Cuánto trabajo se consume en vencer el rozamiento?
Respuesta. a) $\Delta W = 1000 J$, b) $\Delta W = 2505 J$, c) $\Delta W = 143 J$, $\Delta W = 46 J$

13. Encontrar la función energía potencial de un resorte si el origen se coloca en la pared y la longitud del resorte sin estirar es *L*.



Respuesta. $U_{(x)} = \frac{1}{2}kx^2 - kLx + C$

Si $C = \frac{1}{2}kL^2 \Rightarrow$

$U_{(x)} = \frac{1}{2}k\left(x^2 - 2Lx + L^2\right) = \frac{1}{2}k(x - L)^2$

14. Una partícula que se mueve a lo largo del eje *x* está sometida a la acción de una fuerza en un sistema conservativo a la que le corresponde la siguiente función energía potencial.

$U_{(x)} = a + bx^2 - cx^4$

Determinar los coeficientes *a*. *b* y *c*, si se sabe que el potencial se anula en el origen, que *x* = 2 m en una posición de equilibrio y que una partícula de 5 kg con una velocidad en el origen de 2 m/s queda en reposo en *x* = l m.
Respuesta. *a* = 0, *b* = 80/7 J/m^2 , *c* = 10/7 J/m^4

15. La energía potencial entre dos moléculas vecinas viene dada por:

$U_{(r)} = \frac{A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}$

siendo *r* la separación entre las moléculas.
a) ¿Cuál es la fuerza entre ellas en función de *r*?
b) ¿Cuál es la posición de equilibrio de las dos moléculas?
c) ¿Qué energía seria necesaria para alejarlas de su posición de equilibrio indefinidamente?

Respuesta. a) $F_{(r)} = -6\frac{A}{r^7} + 12\frac{B}{r^{13}}$, b) $r = \left(\frac{2B}{A}\right)^{1/6}$, c) $\Delta E = \frac{A^2}{4B}$

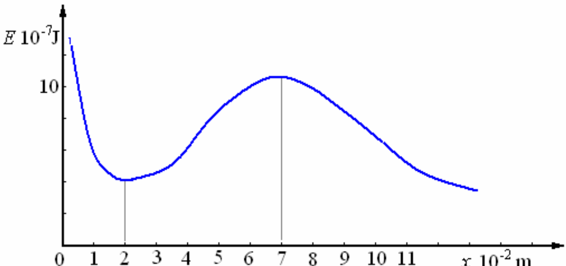
16. Hallar la fuerza conservativa que da origen a la función energía potencial.

$U_{(r)} = 3x^2 y + \frac{zy}{x} - y^2$

Respuesta.

$\vec{F} = y\left(\frac{z}{x^2} - 6x\right)\hat{i} + \left(2y - 3x^2 - \frac{z}{x}\right)\hat{j} - \frac{y}{x}\hat{k}$

17. Una partícula de masa 4y penetra en una región en la cual su energía potencial es la indicada en la figura y pasa valores grandes de x, a los cuales su energía potencial es cero, tiene una energía cinética de 16 x 10^{-7} J .
a) ¿Cuál es su energía cinética en los puntos A, B y C?
b) Estando en el punto A, la partícula pierde bruscamente la mitad de su energía total. (la gráfica de la energía potencial no se altera). Describe cualitativamente el movimiento subsiguiente, dando el dominio de valores de *x* en el cual puede moverse la partícula.



Respuesta. $E_A = 8 \times 10^{-7}$ J , $E_B = 12 \times 10^{-7}$ J , $E_C = 6 \times 10^{-7}$ J

18. Un bloque de masa *m* es lanzado hacia arriba en un plano inclinado con una velocidad de magnitud v_0 . El ángulo del plano es θ y el coeficiente de fricción del bloque y el plano es μ . Si el bloque viaja una distancia *L* hasta detenerse y comienza a bajar volviendo a su posición original. Calcular,
a) El trabajo realizado por la fuerza normal durante el movimiento.
b) El trabajo realizado por la fuerza de fricción durante el movimiento.
c) El trabajo realizado por la fuerza de gravedad durante el movimiento.
d) Encontrar *L* en función de v_0 , y θ.
e) ¿Cuál es la velocidad del bloque cuando vuelve al punto inicial?
Respuesta. a) 0, b) $-2\mu mgL\cos\theta$, c) 0,

d) $L = \frac{v_0^2}{2g(\mu\cos\theta + \text{sen}\theta)}$,

e) $v = \sqrt{v_0^2 - 4\mu gL\cos\theta}$

19. Se dispara un proyectil con una velocidad inicial de magnitud v_0 y formando un ángulo θ con la

horizontal. Usando la conservación de la energía encontrar.
a) La altura máxima alcanzada.
b) La magnitud de la velocidad cuando el proyectil está a la mitad de su máxima altura.

Respuesta. a) $h = \dfrac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$,

b) $v = v_0\sqrt{\dfrac{(1+\cos^2\theta)}{2}}$

20. Una fuerza F = 8t (t en segundos, F en Newton), actúa la partícula P de masa m = 4kg durante un tiempo t = 6 s.
Sí parte del reposo a partir del origen.
a) Calcular el trabajo efectuado.
b) Calcular la energía cinética al instante t.
Respuesta. a) W = 2592 J, b) $K = 2t^4$ J.

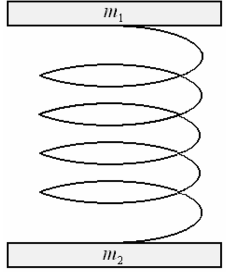
21. Un resorte de longitud ℓ y constante k se sujeta a un bloque de masa m y al piso. Si el bloque se levanta a una altura 3 ℓ y soltado desde el reposo.
a) ¿Cuál será la velocidad del bloque cuando esté a una altura 2 ℓ ?
b) ¿Cuál será la máxima compresión del resorte?

Respuesta. a) $v = \sqrt{3\dfrac{k}{m}\ell^2 + 2g\ell}$,

b)

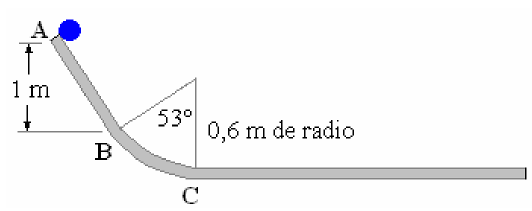
$$y = \frac{k\ell - mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{k\ell - mg}{k}\right)^2 + \frac{(3k\ell^2 + 6mg\ell)}{k}}$$

22. Dos placas cuyas masas son m_1 y m_2, respectivamente, están conectadas por un resorte. ¿Qué fuerza deberá aplicarse a la placa superior para elevar la placa inferior después que se retira la presión? No tomar en cuenta la masa del resorte.



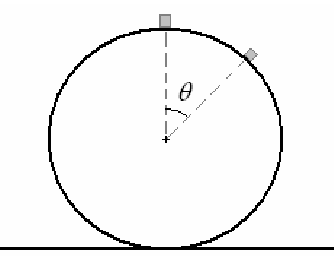
Respuesta. a) $F > (m_1 + m_2)g$

23. Una bolita de masa m desliza a partir del reposo hacia abajo por un carril doblado como se muestra en la figura, el rozamiento es despreciable, hallar:
a) La reacción normal del carril en A.
b) La energía cinética de la bolita en B.
c) La reacción normal del carril en 8.
d) La energía cinética de la bolita en C.
e) La reacción normal del carril en C.



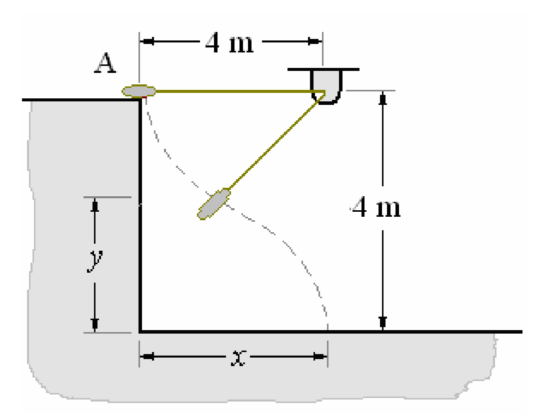
Respuesta. a) 0,5 mg , b) 0.3 mg , c) 2,5 mg d) 1,1 mg , e) 5,4 mg

24. Un bloque pequeño de masa m resbala partiendo de la parte superior de una esfera sin fricción de radio R. ¿Cuál es el ángulo en el que el bloque pierde contacto con la esfera.



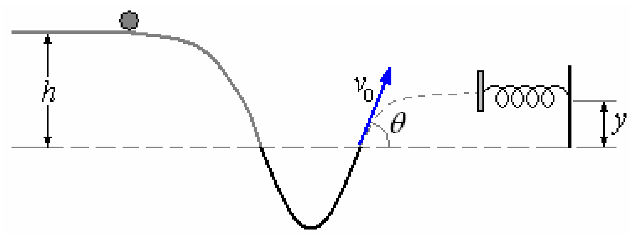
Respuesta. a) $\cos\theta = \dfrac{2}{3}$

25. 1n saco se empuja suavemente por el borde de una pared en A y oscila en un plano vertical colgado del extremo de una cuerda de 4m que puede soportar una tensión máxima igual a dos veces el peso del saco.
a) Determinar la altura a la que se rompe la cuerda.
b) ¿A qué distancia de la pared vertical caerá al .suelo el saco?



Respuesta. a) y = 1,33 m

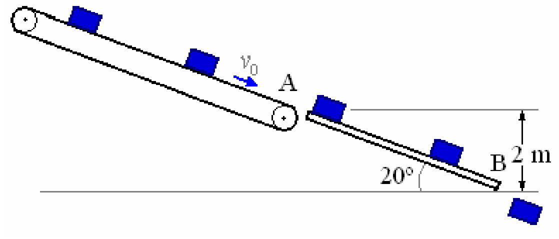
26. Una bola pequeña de masa m = l g desliza hacia el fondo de un valle moviéndose sin rozamiento como se indica en la figura. Partiendo del reposo, la bola cae desde una altura h = 2m y abandona el fondo del valle formando un ángulo θ con la horizontal. En el punto más elevado de su trayectoria la bola choca con un resorte montado sobre una pared y lo comprime 2 cm. La constante del resorte es k = 49 N/m.
a) ¿A qué altura y está el resorte? b) ¿Cual es el ángulo θ?



Respuesta. a) y =1 m, b) $\theta = 45°$

27. Una bola de acero de masa 1 kg está unida a un extremo de un alambre de 1m de largo y gira alrededor del otro extremo con una velocidad angular de 120 rpm. ¿Cuál es la energía cinética de la bola?
Respuesta. 78,88 J

28. La faja transportadora de la figura se mueve con una velocidad constante v_0 y descarga los paquetes sobre la rampa AB. El coeficiente de rozamiento entre los paquetes y la rampa es 0,30. Sabiendo que los paquetes deben alcanzar el punto B con una velocidad de 4 m/s, determinar la velocidad v_0 requerida en la faja transportadora.



Respuesta. 3,02 m/s

29. Una locomotora ejerce un tiro constante en la barra de tracción de 160000 N mientras aumenta la velocidad de 48 a 72 km/h. ¿Cuál es la potencia que desarrolla la locomotora:
a) al comienzo del periodo?
b) al final del periodo?
c) ¿Cuáles la potencia .media durante el periodo?
Respuesta. a) 2859 hp , b) 4290 hp c) 3574 hp

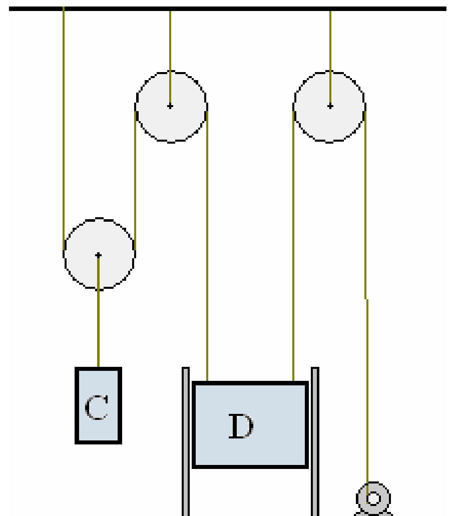
30. Una grúa industrial puede levantar su máxima permitida de 25 toneladas a la velocidad de 20mm/s. Sabiendo que la grúa es movida por un motor de 10 kW. Determinar su rendimiento.
Respuesta. 49%

31. ¿Cuál es la velocidad máxima la que un motor capaz de suministrar 10 kW puede elevar un ascensor de masa 500kg, sin tomar en cuenta las fuerzas de rozamiento?
Respuesta. v = 2,0 m/s

32. Si a un automóvil de masa 1000 kg que se mueve sobre una carretera horizontal con una velocidad de 48 km/h se le apaga al motor, este recorre aún 0,8 km antes de detenerse. carga
a) Considerando que la fuerza de rozamiento es independiente de la velocidad, calcule su valor medio.
b) ¿Qué potencia debe consumirse para mantener el automóvil en movimiento con una velocidad de 48 km/h?
Respuesta. a) F_f = 110 N b), P = 2 hp

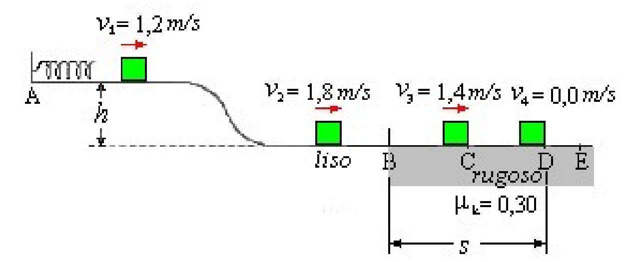
33. Un automóvil de 1500 kg se desplaza 200 m mientras es acelerado uniformemente desde 50 hasta 73 km/h. Durante todo el movimiento el automóvil se desplaza sobre una carretera horizontal, y la resistencia al movimiento es igual al 2 por ciento del peso del automóvil. Determinar:
a) La máxima potencia requerida.
b) La potencia requerida para mantener la velocidad constante de 75 km/h.
Respuesta. a) 25 kW , b) 6,13 kW

34. Un peso D y el contrapeso C tienen cada uno una masa de 350 kg. Determinar la potencia requerida cuando el peso:
a) Se mueve hacia arriba con velocidad constante de 4m/s.
b) Tiene una velocidad instantánea de 4m/s hacia arriba y una aceleración hacia arriba de 0,9 rn/s^2.



Respuesta. 6,86 kW , 8.44 kW

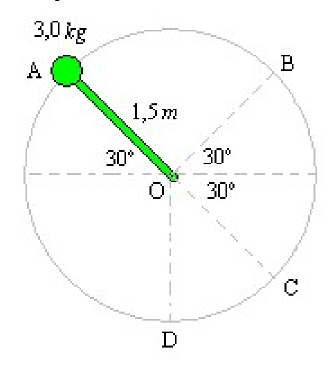
35. Un bloque de 0,50 kilogramos es sujetado contra el resorte por una fuerza externa horizontal de 36 N. Se quita la fuerza externa, y el bloque se proyecta con una velocidad v_1 = 1,2 m/s a partir de la separación del resorte. El bloque desciende una rampa y tiene una velocidad v_2 = 1,8 m/s en la base. La pista es sin fricción entre los puntos A y B. El bloque ingresa a una sección rugosa en B, extendiendo hasta E. El coeficiente de fricción cinética es 0,30. La velocidad del bloque es v_3 = 1,4 m/s en C. El bloque se mueve hasta C donde se detiene.



a) La constante del resorte es:
b) La compresión inicial del resorte en cm es:
c) La altura *h* de la rampa en cm es:
d) El trabajo realizado por la fricción entre los puntos B y C es:
e) La distancia s que el bloque viaja entre los puntos B y D es:

Respuesta.
a) 1800 N/m, b) 2,0, c) 9, d) -0.32 J e) 0,55 m

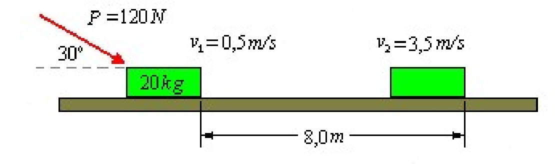
36. Una barra sin masa de 1,5 m se fija libremente a un pivote sin fricción en O. Una bola de 3,0 kilogramos se une al otro extremo de la barra. La bola se sostiene en A, donde la barra hace un ángulo 30º sobre el horizontal, y se lanza. El montaje de la bola-barra puede girar libremente en un círculo vertical entre A y B



a) La bola pasa a través de C, donde la barra forma un ángulo de 30º debajo de la horizontal. La rapidez de la bola cuando pasa por C es:
b) la tensión en la barra cuando la bola pasa por el punto más bajo D es:

Respuesta. a) 5,4 m/ s, b) 120 N

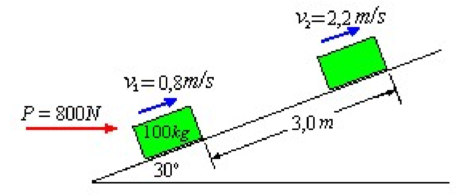
37. Una fuerza externa constante P =120 N se aplica a una caja de 20 kilogramos, que está en una superficie horizontal áspera. La fuerza empuja la caja una distancia de 8,0 m, en un intervalo del tiempo de 4,0 s, y la velocidad cambia de v_1 = 0,5 m/s a v_2 = 3,5 m/s.



a) El trabajo realizado por la fuerza externa es:
b) El trabajo realizado por la fricción es:
c) La razón de cambio promedio de la energía cinética de la caja, en los 4,0 segundos es:

Respuesta. a) 830 J, b) -700 J, c) 30W

38. Un cajón de 100 kilogramos está en una superficie áspera inclinada 30º. Una fuerza externa constante P de 800 N se aplica horizontalmente al cajón. La fuerza empuja el cajón una distancia de 3,0 m arriba de la pendiente, en un intervalo del tiempo de 2,0 s, y la velocidad cambia de v_1 = 0,8 m/s a v_2 = 2,2 m/s.



a) El trabajo realizado por el peso es:
b) El trabajo realizado por la fuerza de fricción es:
c) El trabajo realizado por la fuerza normal es:
d) La potencia media producida por la fuerza externa P durante los 2,0 segundos es:

Respuesta.
a) -1500 J, b) - 400 J c) Cero , d) 1050 W

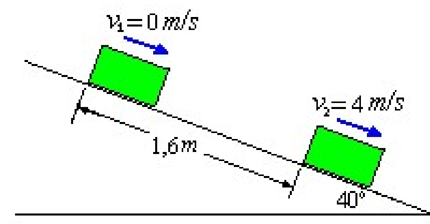
39. Una muchacha lanza una piedra de un puente. Considere las maneras siguientes que ella puede lanzar la piedra. La velocidad de la piedra con la que lanza es igual en cada caso.
Caso A: Lanzada derecho para arriba.
Caso B: Lanzada derecho para abajo.
Caso C: Lanzada con ángulo de 45º sobre horizontal.
Caso D: lanzada horizontalmente.
¿En qué caso la velocidad de la piedra será mayor cuando llega al agua?

Respuesta. la rapidez es la misma en todos los casos.

40. Para hacer el trabajo sobre un objeto,
A) es necesario que haya fricción.
B) es necesario que no haya fricción.
C) el objeto debe moverse.
D) la fuerza que hace el trabajo debe estar dirigida perpendicularmente al movimiento del objeto.
E) la fuerza aplicada debe ser mayor que la fuerza de la reacción del objeto.

Respuesta. C) el objeto debe moverse.

41. Un bloque de 8,0 kilogramos se lanza del reposo, v_I = 0 m/s, en una pendiente rugosa. El bloque se mueve una distancia de 1,6 m abajo de la pendiente, en un tiempo de 0,80 s, y adquiere una velocidad de v_2 = 4,0 m/s.



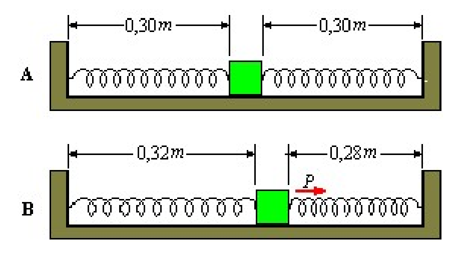
a)) El trabajo realizado por el peso es:
b) La razón promedio a la cual la fuerza de fricción realiza trabajo en el intervalo de tiempo de 0,80 s es:

c) La razón promedio a la cual la fuerza normal realiza trabajo en el intervalo de tiempo de 0,80 s es:
d) La razón promedio a la cual el bloque gana energía cinética durante el intervalo de tiempo de 0,80 s es:
Respuesta.
a)) + 80 J, b) - 20 W, c) Cero, d) 80 W

42. Una persona de 60 kilogramo cae desde el reposo uno distancia 1,20 m sobre una plataforma de masa insignificante apoyada sobre un resorte duro. La plataforma baja 6 cm antes de que persona vuelva al reposo. ¿Cuál es la constante del resorte?
Respuesta. $4,12 \times 10^5$ N/m

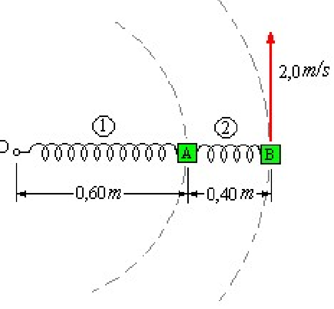
43. Un objeto está sujeto a una fuerza restauradora $F = 6x^3$, donde x es el desplazamiento del objeto desde su posición de equilibrio. ¿Qué trabajo debe realizarse para mover al objeto desde $x = 0$ $x = 0,15$ m?
Respuesta. $7,59 \times 10^{-4}$ J

44. Dos resortes idénticos tienen longitudes sin estirar de 0,25 m y las constantes de la fuerza de 200 N/m. Los resortes se unen a un bloque pequeño y se estiran a una longitud de 0,30 m como en la figura A. Una fuerza externa P tira del bloque 0,02 m a la derecha y lo sostiene allí. (Véase La Figura B)



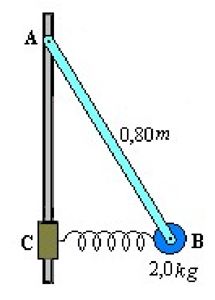
a) El trabajo requerido para ensamblar los resortes y el bloque (figura A) es :
b) La fuerza externa P, que mantiene al bloque en su lugar (figura B) es:
c) El trabajo realizado por la fuerza externa P en jalar el bloque 0,02 m es:
Respuesta.
a) 0,50 J, b) E) 8 N, c) 0,08 W

45. El bloque A (0,40 kg) y el bloque B (0,30 kg) están sobre una mesa sin fricción. El resorte 1 conecta al bloque A a una varilla sin frición O y el resorte 2 conecta el bloque Ay el bloque B. Los bloques están en movimiento circular uniforme alrededor de o, y los resortes tienen longitudes de 0,60 m y 0,40 m, como se muestra. La velocidad lineal del bloque B es 2.0 m/s.



a) El resorte 2 estira 0,06 m. La constante de fuerza del resorte 2 es:
b) La constante de fuerza del resorte 1 es igual a 30 N/ m. La longitud sin estirar del resorte 1 es:
Respuesta. a) 20 N/m, b) 0,53 m

46. Una barra ligera de 0,80 m se fija libremente a un eje vertical en A. Un disco de 2,0 kilogramos se une a la barra en B. Un resorte se une a la masa en B y a la manga en el eje en C. A La manga es sin fricción, permitiendo que se baje y suba libremente, de modo que el resorte sea siempre horizontal cuando esté estirado. La longitud del resorte sin estirar es 0,45 m y la constante es 210 N/m.



a) El eje está girando y el resorte estirado tiene una longitud de 0,48 m. La aceleración radial del disco es:
b) El eje está girando y la varilla forma un ángulo de 40º con el eje. El resorte está estirado y horizontal. La aceleración radial del disco es:
c) El eje está girando y el resorte tiene una longitud de 0,45 m. La aceleración radial del disco es:
Respuesta.
a) 10,5 m/s^2 b) 15,0 m/s^2, c) 6,7 m/ s^2

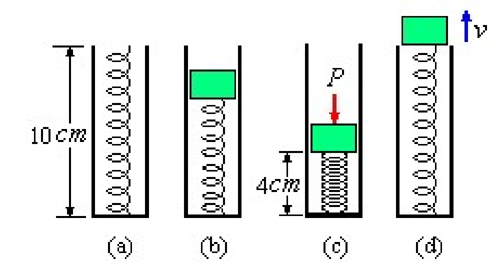
47. Cierto coche que viaja 20 resbalones del mph a una parada en 20 metros del punto donde los frenos fueron aplicados. ¿En qué distancia el coche pararía aproximadamente la tenía que va 40 mph?
Respuesta. 80 metros

48. Un motor de la arena en una mina levanta 2.000 kilogramos de la arena por minuto una distancia vertical de 12 metros. La arena está inicialmente en el resto y se descarga en la tapa del motor de la arena con la velocidad 5 m/s en un canal inclinado de cargamento. ¿En qué tarifa mínima se debe la energía proveer a esta máquina?
Respuesta. 4,34 kW

49. La constante de un resorte es 500 N/m y su longitud sin estirar es 0,60 m. Un bloque de 4,0 kilogramos se suspende del resorte. Una fuerza

externa tira hacia abajo lentamente el bloque, hasta que el resorte se ha estirado a una longitud de 0,72 m. se quita y el bloque sube.
a) La fuerza externa sobre el bloque es:
b) Cuando el resorte se ha contraído una longitud de 0.60 m, la velocidad del bloque hacia arriba es: :
c) Cuando el resorte se ha contraído una longitud de 0.66 m, la aceleración del bloque incluyendo su dirección es:
Respuesta. a) 20 N, b) 0,4 m/ s, c) 2 m/s^2, hacía abajo

50. la constante de un resorte es 200 N/m y su longitud sin estirar es 10 centímetros. El resorte se pone dentro de un tubo liso de 10 centímetros de alto (la figura a). Un disco de 0,40 kilogramos se coloca sobre el resorte (figura b). Una fuerza externa P empuja el disco hacia abajo, hasta que el resorte tiene 4 centímetros de largo (la figura c). Se quita la fuerza externa, el disco se proyecta hacia arriba y emerge del tubo (figura d).



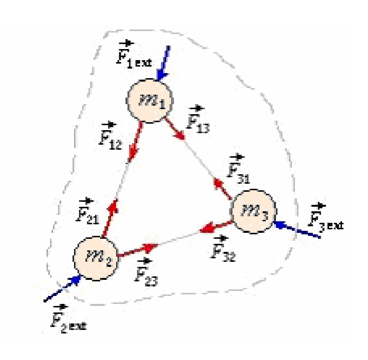
a) La compresión del resorte en la figura b es:
b) La fuerza externa P en la figura c es:
c) La energía potencial elástica del resorte en la figura c es:
d) La aceleración inicial del disco cuando la fuerza externa es removida es:
e) La velocidad *v* del disco cuando emerge del tubo en la figura d es:
Respuesta. a) 2,0 , b) 8N, c) 0,36 J, d) 20 m/s^2, e) 0,80m/s

CAPÍTULO 6. SISTEMA DE PARTÍCULAS

INTRODUCCIÓN

Hasta ahora hemos estado estudiando el movimiento de los objetos cualquiera que sea sin considerar su estructura. Ahora demostraremos que lo estuvimos haciendo bien considerando al objeto sin tomar en cuenta las fuerzas que actúan sobre sus partes. Introduciremos el concepto de centro de masa de un sistema de partículas, también se introducirá el concepto de cantidad de movimiento y se demostrará que este se conserva cuando el sistema se encuentra aislado de los alrededores,

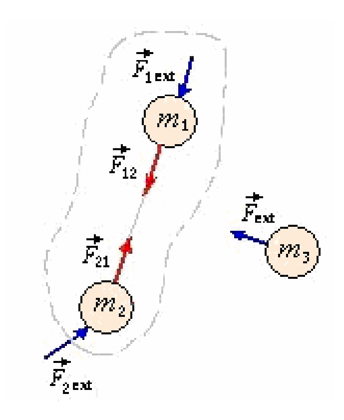
SISTEMA DE PARTICULAS



La figura muestra un sistema de partículas compuesto de tres masas. En el sistema existen dos tipos de fuerzas,

a) Las fuerzas externas como la atracción gravitacional de la tierra por ejemplo.

b) Las fuerzas internas que las partículas ejercen unas sobre otras (estas fuerzas pueden ser gravitacionales, e1éctricas, etc.)

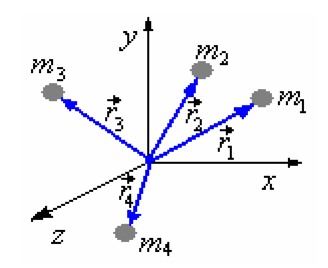


En la figura hemos cambiado el contorno del sistema, excluyendo la masa m_3. Como Una Consecuencia de esto las fuerzas internas Sobre m_1 y m_2 debido a m_3 ya no son internas, se han sumado a las fuerzas externas previas, produciendo una nueva fuerza resultante.

La selección del contorno de un sistema es similar a seleccionar un sistema de coordenadas.

SEGUNDA LEY DE NEWTON APLICADA A UN SISTEMA DE PARTICULAS

La figura siguiente muestra un sistema de *n* partículas de masas m_1, m_2, …..m_n, con posiciones especificadas por $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ………… $\vec{r}_n$,, respectivamente.



La segunda ley de Newton para la partícula m_i es:

$$\vec{F}_i = m\vec{a}_i = \vec{F}_{iexter} + \vec{F}_{i\,\mathrm{int}}$$

Donde:

$\vec{F}_{i\,\mathrm{int}}$ = suma de las fuerzas internas sobre m_i

$\vec{F}_{i\,\mathrm{ext}}$ = suma de las fuerzas externas sobre m_i

La suma de las fuerzas internas sobre la masa m_i es:

$$\vec{F}_{1\,\mathrm{int}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots\ldots\ldots\ldots \vec{F}_{12} = \sum_{(j\neq i)}^{n} \vec{F}_{ij}$$

En general para la partícula *i* es:

$$\vec{F}_{i\,\mathrm{int}} = \sum_{(j\neq i)}^{n} \vec{F}_{ij}$$

La fuerza total para el sistema es:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{i=n} m\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_{i\,\mathrm{ext}} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{(j\neq i)}^{n} \vec{F}_{ij}$$

Por la tercera ley de Newton cada una de las fuerzas

$\vec{F}_{ij}$ tiene un $\vec{F}_{ji}$ igual, pero de sentido contrario

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

De modo que $\sum_{i=0}^{n}\sum_{(j\neq i)=1}^{n}\vec{F}_{ij} = 0$

Consecuentemente solo queda

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i\,\text{ext}} \text{ o } \frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i\,\text{ext}}$$

CENTRO DE MASA

Frecuentemente es muy práctico reemplazar un sistema de muchas partículas con una partícula simple equivalente de masa igual. La pregunta es donde colocar esta partícula simple con respecto al origen de *x* e *y*.

Definamos el vector posición del centro de masa por la ecuación:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Llamando a $\sum_{i=1}^{n} m_i = M$ (masa total de las *n* partículas).

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M}$$

Como $\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} + z_{CM}\hat{k}$

Tenemos que: $x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$,

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \ , \ z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

Si hacemos que el número de elementos *n*, se aproximen al infinito, la sumatoria se reemplaza por una integral y *m* por el elemento diferencial *dm*.

Luego.

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta m_i = \frac{1}{M}\int x dm$$

De igual forma se obtiene:

$$y_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta m_i = \frac{1}{M}\int y dm \ ,$$

$$z_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} z_i \Delta m_i = \frac{1}{M}\int z dm \text{ y}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASA.

Si en la ecuación: $\frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=0}^{n} m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iext}$

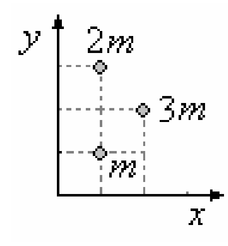
Sustituimos $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = M\vec{r}_{CM}$

Obtendremos la ecuación del movimiento del centro de masa

$$\frac{d^2}{dt^2}M\vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iext} \Rightarrow M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iext}$$

El punto indicado por $\vec{r}_{CM}$, vector posición del centro de masa, se mueve se mueve como si en el estuviera concentrada toda la masa y las fuerzas externas del sistema.

Ejemplo 1. Centro de masa de tres masas puntuales.



El centro de masa esta dado por:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

$$= \frac{m(1) + 2m(1) + 3m(2)}{m + 2m + 3m}$$

$$= \frac{9m}{6m} = \frac{3}{2}$$

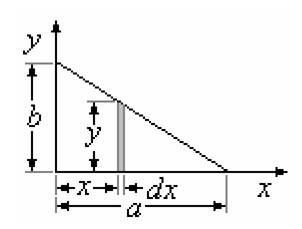
$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

$$= \frac{m(1)+2m(3)+3m(2)}{m+2m+3m}$$

$$= \frac{13m}{6m} = \frac{13}{6}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{3}{2}\hat{i} + \frac{13}{6}\hat{j}$$

Ejemplo 2. Centro de masa de un triángulo.



$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int xdm$$

Para evaluar

$$dm = \frac{\text{masa total}}{\text{área total}} \times \text{área de la lámina}$$

$$= \frac{M}{\frac{1}{2}ab} ydx = \frac{2M}{ab} ydx$$

Luego: $x_{CM} = \frac{1}{M}\int xdm = \frac{1}{M}\int x\left(\frac{2M}{ab}\right)ydx$

$$= \frac{2}{ab}\int_0^a xydx$$

Para poder integrar tenemos que expresar la variable y en función de x.

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{y}{b} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow y = \frac{b}{a}(a-x)$$

Sustituyendo:

$$x_{CM} = \frac{2}{ab}\int_0^a x\frac{b}{a}(a-x)dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a x(a-x)dx$$

$$= \frac{2}{a^2}\int_0^a (ax-x^2)dx = \frac{2}{a^2}\left[a\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

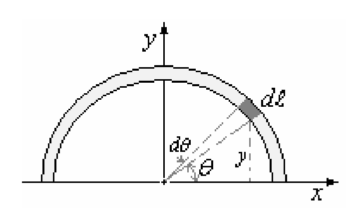
$$= \frac{2}{a^2}\left(\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{3}\right) = \frac{a}{3}$$

Realizando cálculos similares encontramos:

$$y_{CM} = \frac{b}{3}$$

Finalmente: $\vec{r}_{CM} = \frac{a}{3}\hat{i} + \frac{b}{3}\hat{j}$

Ejemplo 3. Centro de masa de un arco semicircular.



Por el sistema de coordenadas escogido, $x_{CM} = 0$, porque por cada elemento de masa a la derecha (+), existe otro elemento igual a la izquierda (-). Sin embargo para y_{CM} es diferente.

$y_{CM} = \frac{1}{M}\int ydm$, en este caso $dm = \lambda d\ell$

Donde $\lambda = \frac{M}{\pi R}$ y $d\ell = Rd\theta$

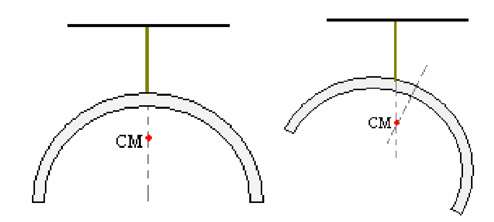
Como $y = R\text{sen}\theta$, tenemos:

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^\pi (R\text{sen}\theta)\lambda Rd\theta = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^\pi \text{sen}\theta d\theta$$

$$= \frac{\lambda R^2}{M}[-\cos\theta]_0^\pi = \frac{R^2}{M}\left(\frac{M}{\pi R}\right)(2)$$

$$= \frac{2R}{\pi} = 0{,}64R$$

El centro de masa no se encuentra dentro del cuerpo. Las figuras siguientes muestran como localizar experimentalmente el centro de masa primero colgándolo de la parte superior y luego de otro punto cualquiera.



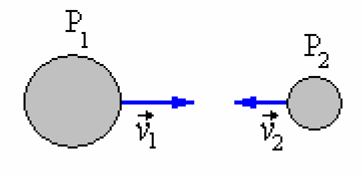
Ejemplo 4. Explosión de una granada



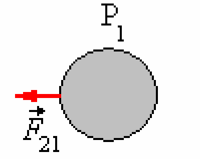
Una granada lanzada al aire que explota en varios fragmentos. La única fuerza externa sobre la granada es la fuerza de la gravedad, entonces la granada sigue una trayectoria parabólica. Si la granada no estallara continuaría moviéndose a lo largo de la trayectoria parabó1ica indicada en la figura. Como las fuerzas de la explosión son internas, no afectan al movimiento del centro de masa. Entonces. Después de La explosión el centro de masa de los fragmentos sigue la misma trayectoria que tendría la granada s! no hubiera habido explosión.

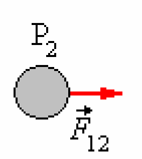
IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Supongamos el caso de dos partículas esféricas P_1 y P_2 de masas m_1 y m_2 con trayectorias contenidas en la misma recta, se aproximan una a otra con velocidades $\vec{v}_1$, y $\vec{v}_2$ respectivamente.

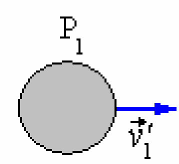


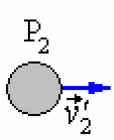
Cuando P_1 y P_2 entran en contacto, P_1 ejerce sobre P_2 la fuerza F_{12} y P_2 ejerce sobre P_1 la fuerza F_{21}. De acuerdo con la tercera ley de Newton $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.





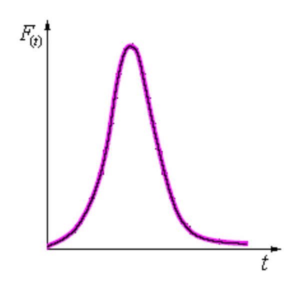
Después que P_1 y P_2 se separan, las velocidades respectivas son $\vec{v}'_1$ y $\vec{v}'_2$ diferentes de $\vec{v}_1$, y $\vec{v}_2$.





Ahora nos preguntamos. ¿Qué pasa durante el choque?

El tiempo de contacto total Δt es muy pequeño, quizás solo de aproximadamente 0,001 segundos. La fuerza de contacto inicialmente es cero, aumenta hasta un valor muy grande y. finalmente disminuye hasta cero, cuando dejan de estar en contacto. La figura siguiente muestra una variación típica de la fuerza en el tiempo de contacto.



Sea $t_f - t_i = \Delta t$ el tiempo que dura el choque, aplicando la segunda ley de Newton a las partículas P_1 y P_2.

$$\vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_1 = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \text{ y}$$

$$\vec{F}_{21} = m_2 \vec{a}_2 = m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

O $\vec{F}_{12} dt = m_1 d\vec{v}_1$ y $\vec{F}_{21} dt = m_2 d\vec{v}_2$

Integrando las dos relaciones durante el choque,

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12}\, dt = m_1 \int_{v_1}^{v'_1} d\vec{v}_1 \text{ y}$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21}\, dt = m_2 \int_{v_2}^{v'_2} d\vec{v}_2$$

Finalmente

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12}\, dt = m_1\left(\vec{v'}_1 - \vec{v}_1\right) \text{ y}$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21}\, dt = m_2\left(\vec{v'}_2 - \vec{v}_2\right)$$

Trabajando con el primer miembro

$\int_{t_i}^{t_f} Fdt$ corresponde al área bajo la curva mostrada en la figura anterior, a ésta cantidad la llamaremos

IMPULSO $\left(\vec{J}\right)$

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{(t)}\, dt$$

Sus dimensiones son: [F] [T] = [M][L][T]$^{-1}$

En el sistema internacional sus unidades son:

Newton.segundo (N.s)

Trabajando con el segundo miembro

$$m_1\left(\vec{v'}_1 - \vec{v}_1\right) \text{ y } m_2\left(\vec{v'}_2 - \vec{v}_2\right)$$

Llamaremos a la cantidad $m\vec{v} = \vec{p}$,

CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL o Momentum lineal de la partícula (lo designaremos en la práctica simplemente como **cantidad de movimiento**), cuyas dimensiones son:

[M] [[L]] = [M] [L] [T]$^{-1}$

En el sistema internacional sus unidades son:

kg.m.s^{-1}

La partícula P_1 ha sufrido en el intervalo $t_f - t_i = \Delta t$, un cambio de la cantidad de movimiento $\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12}\, dt = m_1\left(\vec{v'}_1 - \vec{v}_1\right) = \vec{p}_f - \vec{p}_i$

y esta cantidad es también igual al impulso $\vec{J}$ recibido en ese instante por la partícula

$$\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

Luego: "**El cambio de la cantidad de movimiento es igual al impulso**".

Ejemplo 5. Una pelota de 100 gramos está en reposo sobre el piso, cuando recibe un puntapié que la lanza con una velocidad de 30 m/s.

a) ¿Qué impulso se dio a la pelota?

b) Si el tiempo que el pie está en contacto con la pelota es 10^{-3} segundos. ¿Cuál es la magnitud aproximada de la fuerza impulsiva?

Solución.

a) El impulso es igual al cambio de la cantidad de movimiento:

$$\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i$$

En este caso

$$m = 0{,}1 \text{ kg}, \ \vec{v}_i = 0, \ \vec{v}_f = 30\hat{i} \text{ m/s}$$

$$\vec{J} = (0{,}1)(30\hat{i}) - 0 = 3\hat{i}\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$$

b) Se puede obtener un estimado de la fuerza que actúa sobre la pelota, dividiendo e1 impulso $\vec{J}$ por el tiempo $\Delta t = t_f - t_i$ en que actúa la fuerza :

$$\vec{F} = \frac{\vec{J}}{\Delta t}$$

Como $\vec{J} = 3\hat{i}\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$ y $\Delta t = 0{,}001\, s$

$$\vec{F} = \frac{3\hat{i}}{0,001} = 3000\hat{i} \text{ N}$$

Ejemplo 6. Se deja caer una pelota de masa *m* de una altura *h* sobre el nivel del suelo y rebota hasta una altura h_1

a) ¿Cuál es la velocidad v_i inmediatamente antes de chocar con el suelo?

b) ¿Cuál es la velocidad v_f inmediatamente después de chocar con el suelo?

c) ¿Cuál es el impulso $\vec{J}$ que se le da a la pelota en el impacto con el suelo?

Solución.

a) Como $\vec{v}_0 = 0$, $x = 0$, $y = h_0$

$$\vec{v}_i = \sqrt{2gh_0}\,\hat{j}$$

b) Como después de chocar $y = h_1$, la velocidad $\vec{v}_f$ después de chocar es:

$$\vec{v}_f = \sqrt{2gh_1}\,\hat{j}$$

c) El impulso de la pelota es:

$$\vec{J} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = m\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_0}\right)\hat{j}$$

CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La cantidad de movimiento de una partícula de masa *m* y velocidad $\vec{v}$ es:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

La cantidad de movimiento de *n* partículas es la suma de las cantidades de movimiento individuales,

$$\vec{p}_{total} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

Usando la expresión de centro de masa

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{CMi}$$

De aquí $\vec{p}_{total} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{CMi}$

La cantidad de movimiento total de un sistema es igual a la cantidad de movimiento de la masa total concentrada en el centro de masa del sistema.

Derivando nuevamente la expresión anterior:

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_{total} = M\frac{d}{dt}\vec{v}_{iCM} = M\vec{a}_{iCM} = \vec{F}_{i\text{ext}}$$

Esta cantidad es muy importante, ya que si no hay fuerza externa,

$$\vec{F}_{i\text{ext}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{p}_{total} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{total} = \text{CONSTANTE}$$

Esto es la conservación de la cantidad de movimiento. Si no hay fuerzas externas sobre un sistema. La cantidad de movimiento total del sistema es constante.

Ejemplo 7. Tres partículas de masas 2 kg, 1 kg y 3 kg respectivamente con vectores posición

$$\vec{r}_1 = \left[5t\hat{i} - 5t^2\hat{j} + (3t-2)\hat{k}\right]\text{cm},$$
$$\vec{r}_2 = \left[(2t-3)\hat{i} - \left(12 - 5t^2\right)\hat{j} + \left(4 + 6t - 3t^3\right)\hat{k}\right]\text{cm}$$
y $\vec{r}_3 = \left[(12t-1)\hat{i} - \left(t^2+2\right)\hat{j} - t^3\hat{k}\right]\text{cm}$

Donde *t* es el tiempo en segundos.

Encontrar: a) La velocidad del centro de masa en *t* = 1 s y *t* = 2 s.

b) La cantidad de movimiento lineal total del sistema en *t* = 1 s y *t* = 2 s.

c) Analizar si el sistema de tres partículas es sistema aislado

Solución.

a) La posición del centro de masa esta dada por la expresión:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Reemplazando valores, obtenemos:

$$\vec{r}_{CM} = \left[(3t-1)\hat{i} + \left(-t^2+3\right)\hat{j} + \left(-t^3+2t\right)\hat{k}\right]\text{cm}$$

La velocidad del centro de masa es

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{CM} = \left[3\hat{i} - 2t\hat{j} + \left(-3t^2+2\right)\hat{k}\right]\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Para t = 1 s

$$\vec{v}_{1M} = \left[3\hat{i} - 2\hat{j} + -\hat{k}\right]\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Para t = 2 s

$$\vec{v}_{2M} = \left[3\hat{i} - 4\hat{j} + -8\hat{k}\right]\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

b) La cantidad de movimiento del sistema es:

$$\vec{p} = +m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 = M\vec{v}_{CM}$$

$$\vec{p} = 6\left[3\hat{i} - 2t\hat{j} + \left(-3t^2+2\right)\hat{k}\right]\frac{\text{kg cm}}{\text{s}}$$

Para t = 1 s

$$\vec{p}_1 = 6\left[3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}\right]\frac{\text{kg cm}}{\text{s}}$$

Para t = 2 s

$$\vec{p}_2 = 6\left[3\hat{i} - 4\hat{j} - 8\hat{k}\right]\frac{\text{kg cm}}{\text{s}}$$

c) Como , $\vec{p}_1 \neq \vec{p}_2$, $\vec{p}$ no es constante, luego el sistema no es aislado.

Ejemplo 8. Un pescador de masa 70 kg está en un bote estacionario de masa 200 kg, cuando su ayudante que no sabe nadar y está en el agua cogido del extremo opuesto, se suelta. El pescador corre 2,5 m hasta alcanzar este extremo. ¿A que distancia del ayudante ahogándose se encontrará el pescador cuando alcance el extremo del bote?

Solución.

Consideremos aislado el sistema bote, pescador, ayudante, por lo tanto su cantidad de movimiento es constante.

$$\vec{p} = M\vec{v}_{cm} = \text{CONSTANTE}$$

Como en inicio el sistema está en reposo:

$$\vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{cm} = 0$$

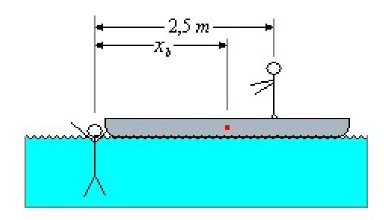
Como $\vec{v}_{cm} = \dfrac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = 0$

$\vec{r}_{cm} = \text{CONSTANTE}$, la posición del centro de masa permanece constante

En éste problema que es en una sola dimensión:
$x_{cm} = \text{CONSTANTE}$

Tomemos como punto de referencia la posición del ayudante en el extremo del bote, al soltarse seguirá en la misma posición.

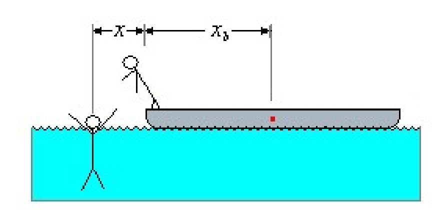
Analicemos la posición inicial.



El centro de masa del sistema pescador-bote está en:

$$x_{cm} = \frac{m_b x_b + m_p(2{,}5)}{m_b + m_p}$$

Analicemos la posición final.



El centro de masa esta en:

$$x_{cm} = \frac{m_b(x_b + x) + m_p x}{m_b + m_p}$$

Como la posición del centro de masa del sistema es invariante, se tiene:

$$\frac{m_b x_b + m_p(2,5)}{m_b + m_p} = \frac{m_b(x_b + x) + m_p x}{m_b + m_p}$$

$$\Rightarrow (m_b + m_p)x = m_p(2,5)$$

Reemplazando valores:

$$x = \frac{70(2,5)}{(200 + 70)} = 0,65\text{m}$$

La posición del pescador estará a 0,65 metros del ayudante.

Ejemplo 9. Un muchacho de masa m_1 y una muchacha de masa m_2, ambos con patines, se encuentran en reposo uno en frente del otro, El muchacho empuja a la muchacha, mandándola hacia el este con una velocidad $\vec{v}$. Describa el movimiento del muchacho.

Solución.

Siendo un sistema cerrado la cantidad de movimiento se conserva,

$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después} = 0,$$

Si $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son las velocidades del muchacho y la muchacha después del empujón, respectivamente:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0$$

Considerando el movimiento en el eje *x*, y la dirección al este como sentido positivo

$$\vec{v}_2 = \vec{v} = v\hat{i}$$

De aquí

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 v\hat{i} = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1} v\hat{i}$$

EI muchacho sale con una velocidad de módulo

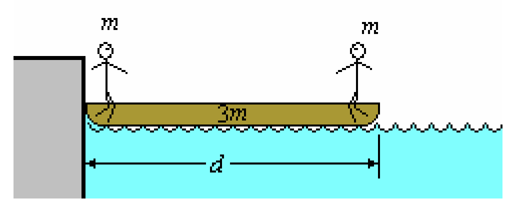
$v_1 = \frac{m_2}{m_1} v$ dirigida hacia el oeste,

Ejemplo 10. Dos personas de masa *m* cada una, se encuentran paradas en los extremos opuestos de un bote de longitud *d* y masa 3*m* que se encuentra en reposo sobre un líquido sin fricción, tal como se muestra en la figura. Las personas caminan una hacia la otra con rapidez constante y se encuentran a *d*/4 del extremo izquierdo del bote.

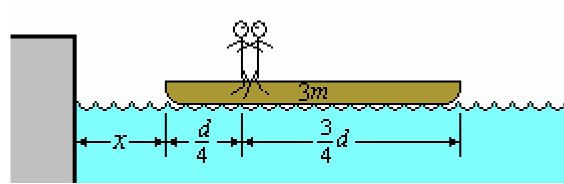
a) Si la persona de la izquierda se mueve con velocidad v_0 respecto al bote, ¿cuál es la velocidad que tiene la otra persona, respecto al bote?

b) ¿Cuál es la velocidad del bote, respecto a tierra, durante el movimiento de ambas personas?

c) ¿Cuánto avanzo el bote hasta el momento del encuentro?



Solución.



a)

El tiempo empleado para encontrarse es el mismo para las dos personas

$$\frac{d/4}{v_0} = \frac{3d/4}{v_1} \Rightarrow v_1 = 3v_0 \text{ Hacia la izquierda}$$

b) Por conservación de la cantidad de movimiento

$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después}$$

$$\vec{p}_{antes} = 0$$

$$\vec{p}_{después} = m(v_0 + v_b)\hat{i} + m(-3v_0 + v_b)\hat{i} + 3mv_b\hat{i} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}_b = \frac{2}{5} v_0 \hat{i}$$

c)

El tiempo de caminata de las personas es $t = \frac{d}{4v_0}$,

luego el bote se habrá movido

$$x = v_b t = \left(\frac{2}{5}v_0\right)\left(\frac{d}{4v_0}\right) = \frac{d}{10}$$

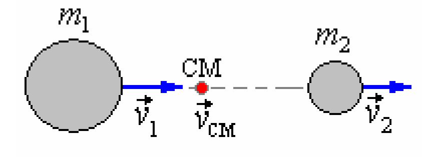
SISTEMA DE REFERENCIA CENTRO DE MASA

Cuando la fuerza externa resultante que actúa sobre un sistema es cero, la cantidad de movimiento total es constante. Muchas veces es conveniente escoger un sistema de coordenada., con el origen situado en el centro de masa. Este sistema se denomina “SISTEMA DE REFERENCIA CENTRO DE MASA”

Con respecto a este sistema la velocidad del centro de masa por supuesto es cero y la cantidad de movimiento total es cero.

El análisis de la mayor parte de los choques es más sencillo en el sistema de referencia centro de masa.

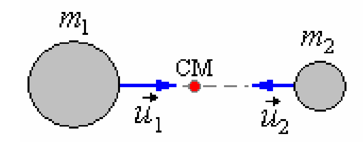
La transformación de un sistema de referencia cualquiera a un sistema centro de masa no es difícil. Consideremos un sistema do dos partículas m_1 y m_2 con velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ respectivamente cuyo centro de masa se mueve con velocidad $\vec{v}_{CM}$, como se muestra en la figura.



La cantidad de movimiento es:

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM}$$

Para transformar esta expresión al sistema Centro de masa, las velocidades de las partículas con respecto al centro de masa son como se muestra en la figura siguiente.



Las velocidades relativas al centro de masa son:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} \text{ y } \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM}$$

Como $\vec{v}_{CM} = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)$$

$$\text{y } \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$= -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)$$

Como comprobación, calculemos la cantidad de movimiento total con respecto al centro de masa, el cual debe ser igual a cero.

$$\vec{p} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

$$= \vec{p} = m_1\left[\frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)\right]$$

$$= m_2\left[-\frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)\right] = 0$$

En la sección siguiente veremos ejemplos de aplicación usando el sistema de referencia centro de masa.

CHOQUES

Se llama choque o colisión entre dos cuerpos a un fenómeno en el que los cuerpos Participantes son libres antes y después de la interacción, sobre los que no actúan fuerzas resultantes.

La interacción dura un tiempo muy corto, durante el cual los cuerpos ejercen entre si fuerzas de cierta intensidad.

Por lo general en los choques sólo participan dos cuerpos, aunque esto no es estrictamente necesario.

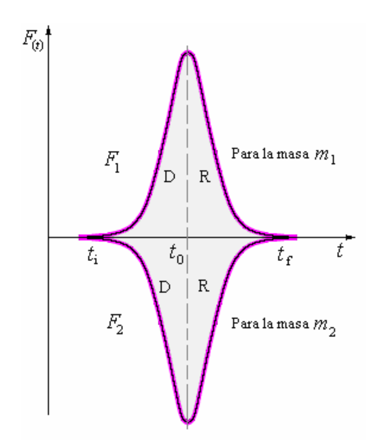
Sean dos cuerpos de masas m_1 y m_2 con velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ antes del choque y velocidades $\vec{v}'_1$ y $\vec{v}'_2$ después del choque respectivamente.

En todo choque entre dos cuerpos se conserva la cantidad de movimiento, esto es:

$$\vec{p} = \vec{p}' \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

Ahora nos introduciremos en el proceso complejo que acompaña al choque, el instante $\Delta t = t_f - t_i$, en el que aparece la fuerza de interacción, este periodo vamos a dividirlo en dos partes, los periodos de deformación y restitución. La figura muestra el gráfico de la fuerza de interacción en función del tiempo entre las masas m_1 y m_2.



E1 tiempo t_0 es el instante de máxima deformación en el que empieza la restitución y las dos masas poseen la misma velocidad

$$\vec{v}_{01} = \vec{v}_{02} = \vec{v}_0$$

Vamos a aplicar la ecuación impulso - cantidad de movimiento para el periodo de deformación (D), $t_i \rightarrow t_0$:

Para la masa m_1:

$$\int_{t_i}^{t_0} \vec{F}_1 dt = m_1 \vec{v}_0 - m_1 \vec{v}_1 = \vec{J}_D$$

Para la masa m_2:

$$\int_{t_i}^{t_0} \vec{F}_2 dt = m_2 \vec{v}_0 - m_2 \vec{v}_2 = \vec{J}_{2D} = -\vec{J}_{1D}$$

Resolviendo para $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

$$\vec{v}_1 = -\frac{\vec{J}_{1D}}{m_1} + \vec{v}_0 \,,\ \vec{v}_2 = \frac{\vec{J}_{1D}}{m_2} + \vec{v}_0$$

La diferencia de estas velocidades es:

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{J}_{1D}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \vec{J}_{1D}\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right)$$

Ahora aplicaremos la ecuación Impulso-cantidad de movimiento por el periodo de restitución (R). $t_0 \rightarrow t_f$.

Para la masa m_1:

$$\int_{t_i}^{t_0} \vec{F}_1 dt = m_1 \vec{v}'_1 - m_1 \vec{v}_0 = \vec{J}_R$$

Para la masa m_2:

$$\int_{t_i}^{t_0} \vec{F}_2 dt = m_2 \vec{v}'_2 - m_2 \vec{v}_0 = \vec{J}_{2R} = -\vec{J}_{1R}$$

Resolviendo para $\vec{v}'_1$ y $\vec{v}'_2$.

$$\vec{v}'_1 = \frac{\vec{J}_{1R}}{m_1} + \vec{v}_0 \,,\ \vec{v}'_2 = -\frac{\vec{J}_{1R}}{m_2} + \vec{v}_0$$

La diferencia de estas velocidades es:

$$\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1 = -\vec{J}_{1R}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

$$= -\vec{J}_{1R}\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right)$$

De lo visto encontramos la relación entre el impulso de restitución y el impulso de deformación.

$$\frac{\vec{J}_{1R}}{\vec{J}_{1D}} = -\frac{(v'_2 - v'_1)}{(v_2 - v_1)} = \varepsilon$$

A esta relación se le conoce como coeficiente de restitución (ε).

Esta relación fue propuesta por Newton y tiene validez solamente aproximada.

El valor de esta relación depende de muchos factores tales como la geometría, las propiedades de los materiales, la velocidad, por ello debemos contentarnos con una determinación experimental.

Ejemplo 11. Una pelota de béisbol de 0,15 kg de masa se está moviendo con una velocidad de 40 m/s cuando es golpeada por un bate que invierte su dirección adquiriendo una velocidad de 60 m/s, ¿qué fuerza promedio ejerció el bate sobre la pelota si estuvo en contacto con ella 5 ms?.

Solución.

Datos: m = 0,15 kg

v_i = 40 m/s

v_f = - 60 m/s (el signo es negativo ya que cambia el sentido)

t = 5 ms = 0,005 s

$\Delta p = J$

$p_f - p_i = J \Rightarrow mv_f - mv_i = F t$

$\Rightarrow F = m(v_f - v_i)/t$

F = 0,15 kg.(- 60 m/s - 40 m/s)/0,005 s

= 0,15 kg.(- 100 m/s)/0,005 s

= - 3000 N

CASOS DE CHOQUE

Perfectamente elástico

$$\varepsilon = 1,\ (v'_2 - v'_1) = -(v_2 - v_1)$$

Inelástico $\varepsilon < 1$

El coeficiente de restitución y tiene un valor entre 0 y 1.

Perfectamente plástico

$$\varepsilon = 0,\ (v'_2 - v'_1) = 0$$

Explosivo $\varepsilon > 1$

Ejemplo 12.

a) Choque perfectamente elástico. En este caso no hay pérdida en la energía mecánica asociada al impacto, la energía cinética permanece constante.

$$K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2$$

$$m_1(v'^2_1 - v_1^2) = m_2(v'^2_2 - v_2^2)$$

Por conservación de la cantidad de movimiento tenemos:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2,$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

$$m_1\left(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1\right) = m_2\left(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2\right)$$

Asumiendo que el movimiento es en una sola dirección

$$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2)$$

Dividiendo entre si las expresiones halladas por energía y por cantidad de movimiento obtenemos.

$$v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2 \Rightarrow (v'_2 - v'_1) = -(v_2 - v_1)$$

$$\Rightarrow \frac{(v'_2 - v'_1)}{-(v_2 - v_1)} = 1$$

El cual es por supuesto el coeficiente de restitución de un choque perfectamente elástico $\varepsilon = 1$.

b) Choque perfectamente plástico. En un choque perfectamente Plástico, después del choque las masas quedan juntas, es decir tienen la misma velocidad, tal que

$\vec{v}'_2 = \vec{v}'_1$, por lo tanto:

$$\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1 = 0 \ \textbf{y} \ \varepsilon = 0$$

Ejemplo 13. Medición del coeficiente de restitución ε.

Si se quiere medir el coeficiente de restitución de 1os materiales, se realiza mediante una bola hecha con uno de los materiales y una superficie plana hecha con el otro material, la que se coloca sobre el suelo. Se suelta verticalmente la bola sobre la superficie desde una altura h_1.

Conocemos la velocidad de la bola al momento del choque

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

La bola rebota verticalmente hasta una altura h_2, tal que la velocidad v'_1 de la bola después del choque es:

$$v'_1 = -\sqrt{2gh_2}$$

Como la superficie no tiene velocidad inicial ni velocidad final $v_2 = 0$ y $v'_2 = 0$.

Encontramos que:

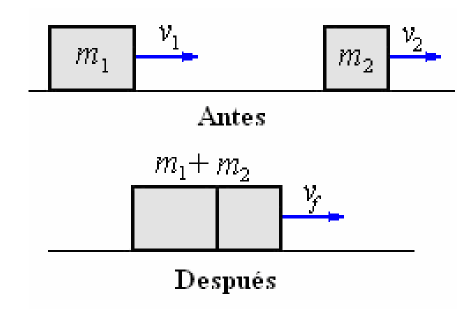
$$\varepsilon = -\frac{(v'_2 - v'_1)}{(v_2 - v_1)} = -\frac{v'_1}{v_1}$$

Reemplazando valores:

$$\varepsilon = -\frac{-\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

Ejemplo 14. Choque plástico o inelástico

a) Velocidades de igual dirección y sentido.



Supongamos un cuerpo 1 de masa m_1 y velocidad v_1 que se dirige a hacia el cuerpo 2 de masa m_2 y velocidad v_2, siendo ambas velocidades de igual dirección y sentido. Sobre cada cuerpo actuó en el momento del choque, el impulso que le provocó el otro cuerpo, entonces hay dos acciones de igual intensidad y sentido contrario, en consecuencia ambas cantidades de movimiento serán iguales y de sentido contrario. Luego del choque ambos cuerpos continúan juntos con una velocidad final común a ambos.

La velocidad final será:

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$$

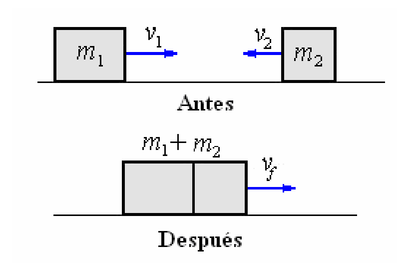
Como v_{1f} y v_{2f} son iguales porque ambos cuerpos siguen juntos:

$$v_{1f} = v_{2f} = v_f$$

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = (m_1 + m_2)v_f$$

$$\Rightarrow v_f = \frac{(m_1v_{1i} + m_2v_{2i})}{(m_1 + m_2)}$$

b) Velocidades de igual dirección y sentido contrario.



En este caso los cuerpos poseían velocidades de igual dirección pero de sentido contrario antes del choque, como en el caso anterior luego del impacto continúan juntos, con una velocidad final que estará dada por la diferencia de las cantidades de movimiento. La velocidad final será:

$$m_1v_{1i} - m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$$

Igualmente:

$$v_{1f} = v_{2f} = v_f$$

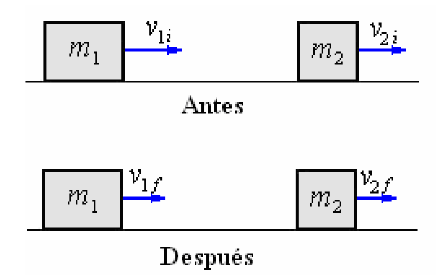
$$m_1v_{1i} - m_2v_{2i} = (m_1 + m_2)v_f$$

$$\Rightarrow v_f = \frac{(m_1v_{1i} - m_2v_{2i})}{(m_1 + m_2)}$$

La velocidad final mantendrá la misma dirección pero tendrá el sentido de la velocidad del cuerpo que antes del choque tenía mayor cantidad de movimiento.

Ejemplo 15. Choque elástico

a) Velocidades de igual sentido



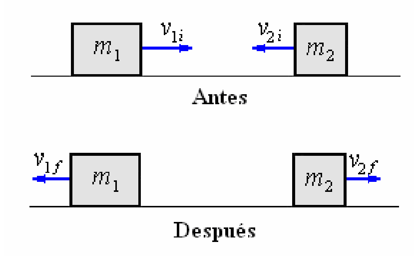
Durante el choque cada cuerpo recibe una cantidad de movimiento que es igual a la velocidad perdida por el otro. Al recuperar su forma inicial, cada uno pierde o gana respectivamente, la cantidad de movimiento ganada o perdida en el momento del choque, la velocidad final de cada uno será:

$$v_{1f} = \frac{m_2}{m_1}\left(v_{2i} - v_{2f}\right) + v_{1i}$$

Si las masas son iguales

$$v_{1f} = v_{2i} - v_{2f} + v_{1i}$$

b) Velocidades de distinto sentido



En este caso los cuerpos literalmente rebotan, y la velocidad final de cada uno será:

$$v_{1f} = \frac{m_2}{m_1}\left(v_{2i} + v_{2f}\right) - v_{1i}$$

Si las masas son iguales

$$v_{1f} = v_{2i} + v_{2f} - v_{1i}$$

El principio de conservación del impulso es el mismo que el de conservación de la cantidad de movimiento.

Cabe aclarar que en la práctica podemos aplicar el principio de conservación de la cantidad de movimiento durante los choques, siempre que el tiempo que el tiempo de duración del impacto sea muy pequeño.

Ejemplo 16. Choque plástico. Las dos partículas quedan en contacto después del choque.

Estudiar desde dos puntos de vista:

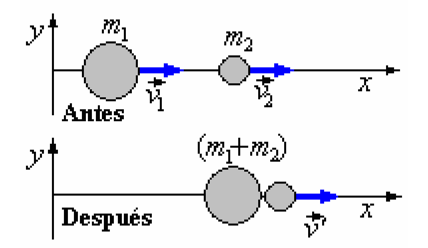
a) Observado desde tierra, sistema laboratorio y

b) Observado desde el centro de masa.

Solución.

a) Sistema laboratorio.

La figura muestra las dos partículas antes y después del choque.



Por conservación de la cantidad de movimiento

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \left(m_1 + m_2\right)\vec{v}' \quad \text{y}$$

$$\vec{v}' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{\left(m_1 + m_2\right)} = \frac{\left(m_1 v_1 + m_2 v_2\right)}{\left(m_1 + m_2\right)}\hat{i}$$

La energía mecánica antes del choque es:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

La energía mecánica después del choque es:

$$K' = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)v'^2 = \frac{1}{2}\frac{\left(m_1 v_1 + m_2 v_2\right)^2}{\left(m_1 + m_2\right)}$$

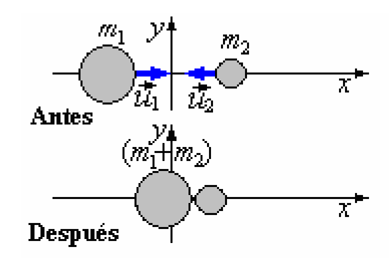
La relación de la energía es:

$$\frac{K'}{K} = \frac{m_1}{\left(m_1 + m_2\right)}\frac{\left(v_1 + \frac{m_2}{m_1}v_2\right)^2}{\left(v_1^2 + \frac{m_2}{m_1}v_2^2\right)}$$

Por ejemplo la caída de un meteorito a la tierra, la que suponemos inmóvil ($v_2 = 0$) y $m_1 << m_2$, obtenemos $K' = 0$ y $\frac{K'}{K} = 0$, éste es un choque perfectamente plástico. Si K fuera diferente de cero, la totalidad de la energía se transformaría en calor.

b) Sistema centro de masa.

La figura muestra las dos partículas antes y después del choque.



En éste caso:

$$\vec{u}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) \text{ y}$$

$$\vec{u}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)$$

Con $\vec{v}_2 = 0$,

Obtenemos:

$$\vec{u}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 \quad \text{y} \quad \vec{u}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1$$

Después del choque m_1 y m_2 entran en contacto constituyendo una sola partícula de masa ($m_1 + m_2$) que está en reposo en el sistema centro de masa,

$u'_1 = u'_2 = 0$.

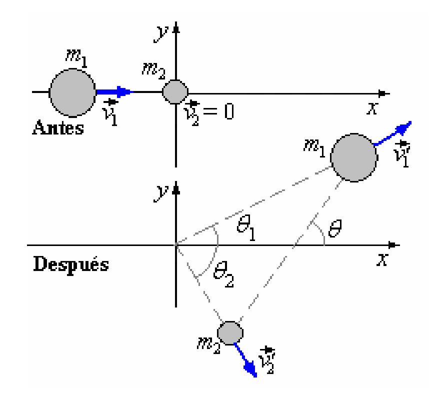
Aquí también $K' = 0$, $\varepsilon = 0$.

Ejemplo 17. Choque elástico. Consideremos dos partículas, una con masa m_1 y velocidad $\vec{v}_1$, la segunda con masa m_2 y velocidad $\vec{v}_2 = 0$

Solución.

a) Sistema laboratorio.

La figura muestra las dos partículas antes y después del choque.



Por conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \qquad (1)$$

En sus componentes:

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 \cos\theta_1 + m_2 v'_2 \cos\theta_2$$

$$0 = m_1 v'_1 \operatorname{sen}\theta_1 - m_2 v'_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

Como es un choque elástico la energía mecánica se conserva:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^2_2 \qquad (2)$$

En las ecuaciones (1) y (2) conocidas las masas m_1 y m_2, tenemos como incógnitas v_1, v'_1, v'_2, θ_1 y θ_2. Contamos con tres ecuaciones. Para resolver necesitamos conocer al menos dos de las cantidades anteriores.

En el caso particular en que $m_1 = m_2$, podemos llegar a la relación;

$$\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2$$

Elevándola al cuadrado:

$$v_1^2 = v'^2_1 + v'^2_2 + 2\vec{v}'_1 \cdot \vec{v}'_2$$

Por la conservación de la energía:

$$v_1^2 = v'^2_1 + v'^2_2$$

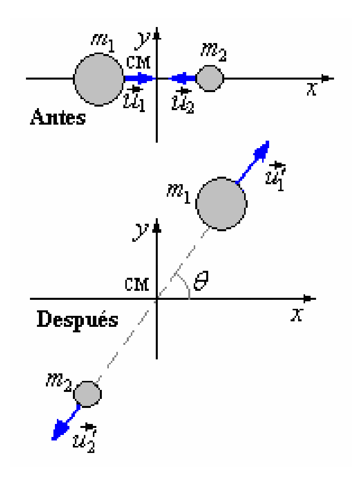
Luego, obtenemos:

$$\vec{v}'_1 \cdot \vec{v}'_2 = 0$$

Las velocidades $\vec{v}'_1$ y $\vec{v}'_2$ son ortogonales, esto nos dice que las trayectorias de las partículas después del choque son perpendiculares entre sí, tal que:
$\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$

b) Sistema centro de masa.

La figura muestra las dos partículas antes y después del choque.



Por conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{u}'_1 + m_2 \vec{u}'_2 = 0$$

De aquí:

$$u_2^2 = \left(\frac{m_1}{m_2} u_1\right)^2, \; u'^2_2 = \left(\frac{m_1}{m_2} u'_1\right)^2$$

Como es un choque elástico la energía mecánica se conserva:

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 u'^2_2$$

Reemplazando u_2 y u'_2 en función de u_1 y u'_1 respectivamente.

$$(m_1 u_1)^2 \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) = (m_1 u'_1)^2 \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)$$

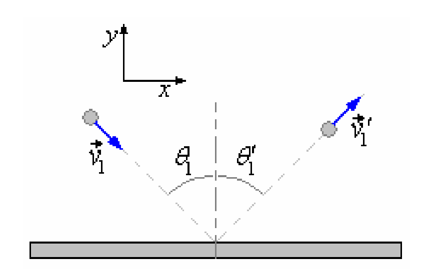
De aquí se deduce:

$$m_1 u_1 = m_1 u'_1 \Rightarrow u_1 = u'_1 \quad \text{y}$$

$$m_2 u_2 = m_2 u'_2 \Rightarrow u_2 = u'_2$$

Para un choque elástico $\varepsilon = 1$, como se espera.

Ejemplo 18. Reflexión de partícula sobre un plano.
Consideremos dos partículas, una con masa m_1, que incide sobre una masa m_2 de superficie plana como se muestra en la figura. La masa m_1 tiene velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}'_1$ antes y después del choque, la superficie inicialmente está inmóvil $\vec{v}_2 = 0$ y tiene una velocidad $\vec{v}'_2$ después del choque.



Solución.

Por conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

Para la energía tenemos que tomar en cuenta si el choque es elástico o no.

a) **Choque elástico.**

En éste caso la energía mecánica se conserva
$K = K'$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

De aquí obtenemos: $v'^2_1 - v_1^2 = \dfrac{m_2}{m_1} v'^2_2$

Expresión que podemos escribir como;
$$\left(\vec{v}_1 + \vec{v}'_1\right) \cdot \left(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1\right) = \frac{m_2}{m_1} \vec{v}_2 \cdot \vec{v}'_2$$

De la conservación de la cantidad de movimiento

$$m_1\left(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1\right) = m_2 \vec{v}'_2 \Rightarrow \left(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1\right) = \frac{m_2}{m_1}\vec{v}'_2$$

Reemplazando ésta expresión en la de la energía, obtenemos:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}'_1 = \vec{v}'_2$$

Como

$$\vec{v}_1 = v_1 \text{sen}\theta_1 \hat{i} - v_1 \cos\theta_1 \hat{j},$$
$$\vec{v}'_1 = v'_1 \text{sen}\theta'_1 \hat{i} + v'_1 \cos\theta'_1 \hat{j},$$

$$\vec{v}'_2 = -v'_2 \hat{j}$$

Reemplazando obtenemos:

$$v_1 \text{sen}\theta_1 \hat{i} - v_1 \cos\theta_1 \hat{j} + v'_1 \text{sen}\theta'_1 \hat{i}$$
$$+ v'_1 \cos\theta'_1 \hat{j} = -v'_2 \hat{j}$$

De aquí:

$$v_1 \text{sen}\theta_1 + v'_1 \text{sen}\theta'_1 = 0 \quad \text{y}$$
$$v_1 \cos\theta_1 - v'_1 \cos\theta'_1 = v'_2$$

En el caso en que $v'_2 = 0$ (la superficie no se mueve)

$$\theta_1 = \theta'_1 \text{ y } v_1 = v'_1$$

b) **Choque inelástico.**

En éste caso $K > K'$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 > \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_1 v'^2_2$$

Para encontrar la relación de *K* y *K’* podemos usar el coeficiente de restitución ε.

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{K'}{K}}, \text{ siendo } 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

Ejemplo 19. En un parque de diversiones dos amigos juegan con los autitos “chocones”. En cierto momento las direcciones de ambos vehículos forman un ángulo α. Un auto se dirige con velocidad $\vec{v}_1$ y el otro con velocidad $\vec{v}_2$ de tal modo que chocan.

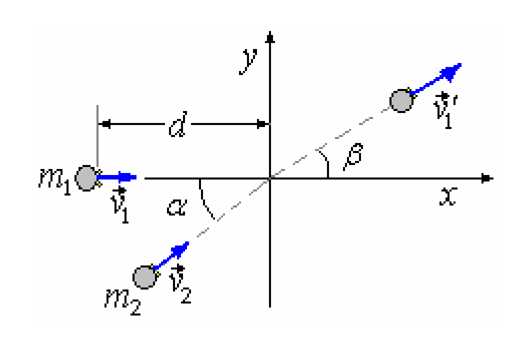
Después del choque el auto 1 sale con velocidad $\vec{v}'_1$ cuya dirección forma un ángulo β, tal como se indica en la figura.

a) Hallar la velocidad del auto 1 luego del impacto.

b) Determinar la posición del centro de masa y las ecuaciones paramétricas del mismo.

c) Determinar si el choque es elástico o no.

$m_1 = m_2 = 200$ kg, $v_{01} = 3$ m/s,
$v_{02} = 1$ m/s, $v'_1 = 2$ m/s, $\alpha = 53^\circ$, $\beta = 37^\circ$,
$d = 3$ m



Solución.

a) por conservación de la cantidad de movimiento

$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después} \Rightarrow$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

Aquí

$$\vec{v}_1 = 3\hat{i},$$

$$\vec{v}_2 = (1)\cos 53^\circ \hat{i} + (1)\text{sen}53^\circ \hat{j}$$

$$= 0{,}6\hat{i} + 0{,}8\hat{j},$$

$$\vec{v}'_1 = (2)\cos 37^\circ \hat{i} + (2)\text{sen}37^\circ \hat{j}$$

$$= 1{,}6\hat{i} + 1{,}2\hat{j}$$

Reemplazando:

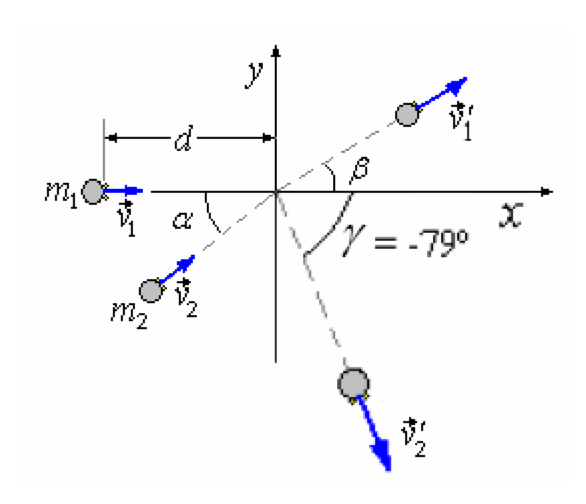
$$3\hat{i} + 0{,}6\hat{i} + 0{,}8\hat{j} = 1{,}6\hat{i} + 1{,}2\hat{j} + \vec{v'}_2$$

$$\Rightarrow \vec{v'}_2 = 2\hat{i} - 0{,}4\hat{j}$$

$$v'_2 = \sqrt{2^2 + 0{,}4^2} = \sqrt{4{,}16}$$

$$= 2{,}04 \text{ m/s}$$

$$\tan\gamma = \frac{2}{-0{,}4} = -5 \Rightarrow \gamma = -79^o$$



b) Para determinar la posición del centro de masa es necesario conocer la posición inicial de la masa m_2. Como m_1 y m_2 emplean el mismo tiempo desde el inicio hasta el choque:

$$t = \frac{d}{v_1} = \frac{3m}{3m/s} = 1s$$

La posición inicial de m_2 es:

$$x_{20} = -v_{2x}t = -0{,}6(1) = -0{,}6 \text{ m},$$
$$y_{20} = -v_{2y}t = -0{,}8(1) = -0{,}8 \text{ m}$$

Siendo la posición inicial de m_1

$$x_{10} = -3m,\ y_{10} = 0$$

El centro de masa está dado por:

$$x_{CM} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2},\ y_{CM} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

Como $m_1 = m_2 = 200kg$

$$x_{CM} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ y_{CM} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

Antes del choque:

$$x_1 = -3 + 3t,\qquad y_1 = 0$$

$$x_2 = -0{,}6 + 0{,}6t,\ y_2 = -0{,}8 + 0{,}8t$$

Luego

$$x_{CM} = -1{,}8 + 1{,}8t,\ y_{CM} = -0{,}4 + 0{,}4t$$

Después del choque:

$$x_1 = 1{,}6(t-1),\ y_1 = 1{,}2(t-1)$$

$$x_2 = 2(t-1),\ y_2 = -0{,}4(t-1)$$

Luego

$$x_{CM} = 1{,}8(t-1),\ y_{CM} = 0{,}4(t-1)$$

c) Para saber si es elástico o no, tenemos que analizar si la energía se conserva o no.

La energía cinética antes del choque es:

$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

$$= \frac{1}{2}(200)(3)^2 + \frac{1}{2}(200)(1)^2$$

= 900 +100 = 1000 J

La energía cinética después del choque es:

$$K' = \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^2_2$$

$$= \frac{1}{2}(200)(2)^2 + \frac{1}{2}(200)(2{,}04)^2$$

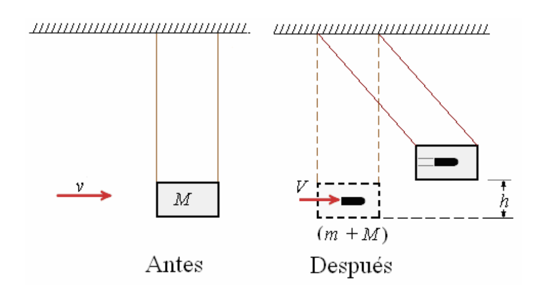
= 400 + 416 = 816 J

Hay una disminución de la energía cinética:

$\Delta K = 816 - 1000 = -184$ J

Luego el choque es inelástico.

Ejemplo 20. El péndulo balístico. Este es el caso de un choque perfectamente plástico, se utiliza para medir la velocidad de un proyectil. Un proyectil de masa *m* y velocidad *v* se incrusta en el bloque de madera de masa *M*.



Aplicando la conservación de la cantidad de movimiento.

$$m\vec{v} = (m + M)\vec{V}$$

La energía cinética después del choque es:

$K' = \frac{1}{2}(m + M)V^2$, ésta se convierte en energía potencial $U = (m + M)gh$

Luego $(m + M)V^2 = (m + M)gh$

$$\Rightarrow V = \sqrt{2gh}$$

La velocidad del proyectil es:

$$v = \frac{(m + M)}{m}V = \frac{(m + M)}{m}\sqrt{2gh}$$

Ejemplo 21. Una bala de 5,00 g se dispara contra un bloque de madera de 1,00 kg suspendido de un hilo de 2,000 m, atravesándolo. El centro de masa del bloque se eleva 0,45 cm. Calcule la rapidez de la bala al salir del bloque si su rapidez inicial es de 450 m/s.

Solución.

La rapidez del bloque de madera después de que la bala ha atravesado (pero antes de que el bloque comience a elevarse; esto asume una gran fuerza aplicada por un tiempo corto, una situación característica de las balas) es

$$V = \sqrt{2gy} = \sqrt{2(9,80)(0,45 \times 10^{-2})}$$

$$= 0,297 \text{ m/s}$$

La rapidez final v de la bala es

$$v = \frac{p}{m} = \frac{mv_0 - MV}{m} = v_0 - \frac{M}{m}V$$

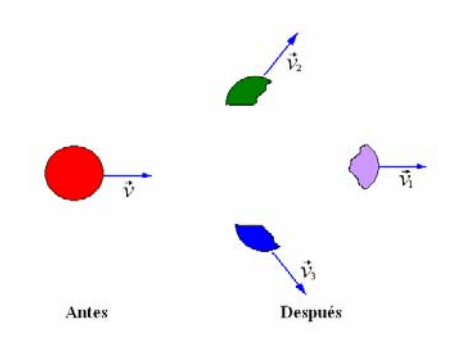
$$= 450 - \frac{1,00}{5,00 \times 10^{-3}}(0,297)$$

$$= 390,6 \text{ m/s}.$$

Ejemplo 22. Un satélite artificial en vuelo explota en tres partes iguales. Una parte continúa a lo largo de su línea original de vuelo y las otras dos van en direcciones cada una inclinada 60º a la trayectoria original. La energía liberada en la explosión es dos veces más que la energía que tenía el saté1ite en el momento de la explosión. Determinar la energía cinética de cada fragmento Inmediatamente después de la explosión.

Solución.

La figura muestra el satélite antes y después de la explosión.



Por conservación de la cantidad de movimiento.

$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después}$$

La cantidad de movimiento debe conservarse en las tres dimensiones *x*, *y*, *z* , independientemente, de allí que v_1, v_2, v_3 y v deben ser coplanares.

Así obtenemos:

$$Mv = \frac{M}{3}v_1 + \frac{M}{3}v_2\cos 60° + \frac{M}{3}v_3\cos 60°$$

y $\frac{M}{3}v_2\text{sen}60° - \frac{M}{3}v_3\text{sen}60° = 0$

De estas dos ecuaciones encontramos que:

$v_2 = v_3$ (1)

$3v = v_1 + v_2$ (2)

La energía inicial es: $E_i = \frac{1}{2}Mv^2$

La energía final es:

$$E_f = \frac{1}{2}Mv^2 + 2\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{3}{2}Mv^2$$

Esta energía es igual a la suma de las energías de los tres fragmentos.

$$\frac{3}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{3}v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{3}v_2^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{3}v_3^2$$

$9v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ (3)

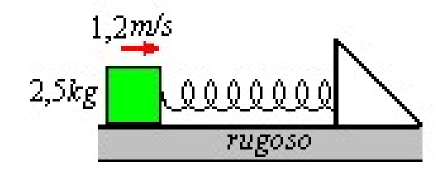
De las ecuaciones (1), (2) y (3) obtenemos:

$v_1 = v$, $v_2 = 2v$, $v_3 = 2v$

La energía cinética de cada uno de los fragmentos inmediatamente después de la explosión es:

$$K_1 = \frac{1}{6}Mv^2,\ K_2 = \frac{2}{3}Mv^2,\ K_3 = \frac{2}{3}Mv^2$$

Ejemplo 23. Un bloque de 2,5 kg, se desliza sobre una superficie rugosa, cuando contacta con el resorte tiene una velocidad de 1,2 m/s. el bloque se detiene momentáneamente cuando el resorte se ha comprimido 5,0 cm. El trabajo realizado por la fricción, desde el instante en que el bloque hace contacto con el resorte hasta el instante en que hace el alto es 0,50 J.
a) ¿Cuál es la constante del resorte (*k*)?
b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción?
c) Después de la compresión del resorte, el bloque se aleja de él, ¿cual es la velocidad del bloque, después de separarse del resorte?



Solución.
a) Energía antes = Energía después

$$\frac{1}{2}(2,5)(1,2)^2 = \frac{1}{2}k(0,05)^2 + 0,5$$

$\Rightarrow$ k = 1040N/m

b) $W_f = \mu mgd$

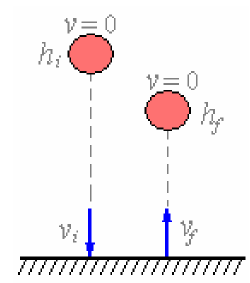
$$\Rightarrow \mu = \frac{W_f}{mgd} = \frac{0,5}{2,5\times 9,8\times 0,05} = 0,41$$

c) $\frac{1}{2}kx^2 - Wf = \frac{1}{2}mv^2$

$$\frac{1}{2}(1040)(0,05)^2 - 0,5 = \frac{1}{2}(2,5)v^2$$

$\Rightarrow$ v = 0,80 m/s

Ejemplo 24. Una pelota de masa *m* = 100 g se deja caer desde una altura *h* = 2m. La pelota rebota verticalmente hasta ¾ *h* después de golpear el suelo.
a) Calcular la cantidad de movimiento de la pelota antes y después de golpear el suelo,
b) si la duración del golpe fue de 0,01 s, calcular la fuerza media ejercida por el piso sobre la pelota.
Solución.
En la figura se muestra el esquema de la situación.



a) Cantidad de movimiento inicial:

$$\vec{p}_i = -mv_i\hat{j}$$

Cantidad de movimiento final:

$$\vec{p}_f = mv_f\hat{j}$$

Los valores de las velocidades inicial y final se pueden calcular usando el principio de conservación de la energía.
Inicial:

$$0 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_i^2 + 0 \Rightarrow v_i = \sqrt{2gh_i}$$

Final:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + 0 = 0 + mgh_f$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{2gh_f} = \sqrt{2g\left(\frac{3}{4}h_i\right)} = \sqrt{\frac{3}{2}gh_i}$$

Por lo tanto, las cantidades de movimiento inicial y final son:

$$\vec{p}_i = -m\sqrt{2gh_i}\,\hat{j},\ \vec{p}_f = m\sqrt{\frac{3}{2}gh_i}\,\hat{j}$$

Reemplazando los valores, se tiene:

$p_i = -0,63$ kgm/s, $p_f = -0,54$ kgm/s

b) Usando la aproximación del impulso:

$$\vec{J} = \vec{F}_m \Delta t = \Delta \vec{p} \Rightarrow \vec{F}_m = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_f - \vec{p}_f}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_m = \frac{0{,}54\hat{j} - \left(-0{,}63\hat{j}\right)}{0{,}01}$$

$$= 118\hat{j} \text{ N}$$

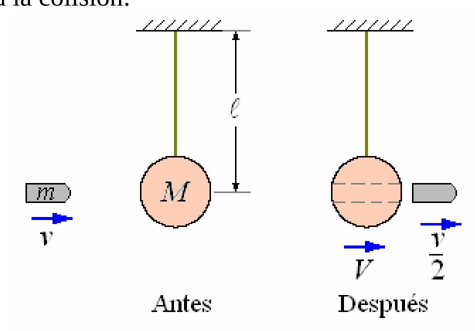
Ejemplo 25. Una bala de la masa *m* y con velocidad *v* pasa a través de un péndulo de masa *M*. La bala emerge con una velocidad de *v*/2. El péndulo está suspendido por una barra rígida de longitud *l* y masa insignificante. ¿Cuál es el valor mínimo de *v* tal que la masa del péndulo gire un círculo completo?

Solución.

En esta colisión, se conserva la cantidad de movimiento pero la energía no.

Este es un ejemplo de una colisión inelástica que no es perfectamente inelástica.

Para la colisión:



$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después} \Rightarrow mv = m\frac{v}{2} + MV$$

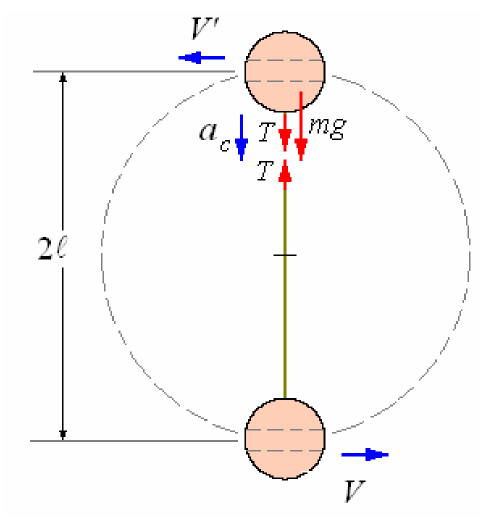
De aquí:

$$v = \frac{2M}{m}V \quad (1)$$

Después de la colisión se conserva la energía para el péndulo (la conservación de la energía para la bala después de la colisión no es útil desde que su energía no cambia). Este tratamiento nos da la velocidad del péndulo el momento después de la colisión:

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV'^2 + Mg(2\ell) \quad (2)$$

Condición para que pueda dar la vuelta



$$T + Mg = Ma_c$$

Condición mínima para hacer movimiento circular

$$T = 0$$

Luego

$$Mg = M\frac{V'^2}{\ell} \Rightarrow V'^2 = g\ell \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2):

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}Mg\ell + Mg(2\ell) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{5}{2}Mg\ell \Rightarrow V = \sqrt{5g\ell}$$

Reemplazando el valor de *V* en (1):

$$v = \frac{2M}{m}\sqrt{5g\ell}$$

MOVIMIENTO CON MASA VARIABLE - PROPULSIÓN POR REACCIÓN

Por la conservación de la cantidad de movimiento si un cuerpo en reposo puede expulsar una parte de su masa en cierta dirección, el resto de la masa se moverá en sentido opuesto, con igual cantidad de movimiento. Si este proceso puede mantenerse durante un tiempo, el resto de la masa, como es el caso de un cohete, aparecerá para un observador externo en reposo. Como si se estuviese acelerando. Esto se expresa mediante la forma más general de la segunda ley de Newton.

Como:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

Siendo la masa variable

$$\vec{F} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

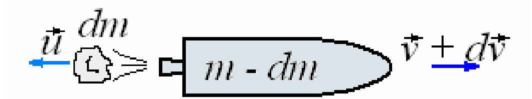
Expresión que nos permite determinar el movimiento de un cuerpo cuya masa cambia durante su movimiento.

Cuando aplicamos al caso de un cohete aparecen los problemas, evidentemente *m* es la masa del cohete que va cambiando. ¿Cuál es la velocidad de escape del combustible? No es igual a $\vec{v}$, la velocidad del cohete. Si no existe fuerza externa, ¿ $\vec{F}$ debe ser cero? Entonces no se moverá el cohete. Analicemos el problema desde el punto de vista de la conservación de la cantidad de movimiento.

Sea el cohete mostrado en la figura siguiente, en el instante *t*, tiene una masa *m* y una velocidad $\vec{v} = v\hat{i}$, con una cantidad de movimiento lineal $m\vec{v}$.



En la figura siguiente se muestra el cohete en el instante $t + dt$, a expulsado una masa dm que sale con una velocidad $\vec{u} = -u\hat{i}$ relativa al cohete. Ahora la masa del cohete es $(m - dm)$ y su velocidad es $\left(\vec{v} + d\vec{v}\right)$.



La cantidad de movimiento lineal total es:

$$(m - dm)\left(\vec{v} + d\vec{v}\right) + dm\left(\vec{v} - \vec{u}\right)$$

Por conservación de la cantidad de movimiento lineal tenemos: $\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después}$

$$m\vec{v} = (m - dm)\left(\vec{v} + d\vec{v}\right) + dm\left(\vec{v} - \vec{u}\right)$$

$$m\vec{v} = m\vec{v} + md\vec{v} - dm\vec{v} + dmd\vec{v} + dm\vec{v} - dm\vec{u}$$

Como el infinitésimo $dmd\vec{v}$ es de segundo orden, podemos despreciar éste término; luego

$$md\vec{v} - dm\vec{u} = 0$$

Dividiendo por dt se obtiene: $m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u}\frac{dm}{dt} = 0$

Como $\vec{v}$ es la velocidad del cohete, $\frac{d\vec{v}}{dt}$ es la aceleración $\vec{a}$.

De éste modo:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{u}\frac{dm}{dt}$$

Por la segunda ley de Newton se puede identificar la cantidad $\vec{u}\frac{dm}{dt}$ como una fuerza, tal que **la fuerza de empuje** es:

$$\vec{F} = \vec{u}\frac{dm}{dt}$$

Como $\vec{u}$ es negativa y $\frac{dm}{dt}$ por se pérdida de mas también es negativa, $\vec{F}$ es positiva, como esperábamos. Esta es una fuerza externa que produce aceleración al cohete, al que ahora consideraremos como un sistema aislado sobre el que hay una fuerza externa.

Velocidad del cohete.

De la expresión $md\vec{v} - dm\vec{u} = 0$, obtenemos:

$$d\vec{v} = \vec{u}\frac{dm}{m}$$

$$\vec{v}_{(t)} = \vec{u}\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} = \vec{u}\left[\ln\right]_{m_0}^{m} = \vec{u}\ln\frac{m}{m_0}$$

Como $\vec{u}$ es negativa y $m < m_0$, $\ln\frac{m}{m_0}$ es negativa.

Luego la velocidad es positiva.

Velocidad límite del cohete.

Una vez que se haya terminado el combustible la masa se reduce a m_1, y llegamos a la velocidad límite.

$$\vec{v}_m = \vec{u}\ln\frac{m_1}{m_0}$$

Una vez alcanzada ésta velocidad, ésta permanecerá constante.

Ejemplo 26. Un cohete y su combustible tienen una masa inicial m_0. El combustible se quema a una razón constante $\frac{dm}{m} = C$.Los gases son expulsados con una velocidad constante $\vec{u}$ respecto al cohete.

a) Despreciando la resistencia del aire, hallar la velocidad del cohete en el instante *t*, después de despegar de la tierra.

b) ¿Cuál es la altura que alcanza en el momento que se acaba el combustible?

Solución.

a) Las fuerzas que actúan sobre el cohete son la fuerza de empuje y la fuerza de la gravedad. Aplicando la segunda ley de Newton.

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{u}\frac{dm}{dt} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Donde $\vec{u} = -u\hat{k}$, $\vec{g} = -g\hat{k}$, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{k}$

y $\frac{dm}{dt} = -C \Rightarrow m = m_0 - Ct$

Reemplazando $uC - (m_0 - Ct)g = (m_0 - Ct)\frac{dv}{dt}$

o $\frac{dv}{dt} = -g + \frac{uC}{(m_0 - Ct)}$

Integrando $\int_0^v dv = \int_0^t -gdt + \int_0^t \frac{uC}{(m_0 - Ct)}dt$

La velocidad en el instante *t* es:

$$v_{(t)} = -gt - u\ln\frac{(m_0 - Ct)}{m_0}$$

b) Antes de encontrar la altura que alcanza en el momento que se acaba el combustible, encontraremos la altura para el tiempo *t*.

Como $v_{(t)} = \frac{dz}{dt}$, tenemos:

$$dz = -gtdt - u\ln\frac{(m_0 - Ct)}{m_0}dt$$

Integrando

$$\int_0^z dz = -\int_0^t gtdt - \int_0^t u\ln\frac{(m_0 - Ct)}{m_0}dt$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 - \frac{u}{C}(m_0 - Ct)\left[\ln\frac{(m_0 - Ct)}{m_0} - 1\right]$$

El tiempo t_1 en que se acaba el combustible es cuando $m = m_1$. Como $m = m_1 - Ct$, obtenemos:

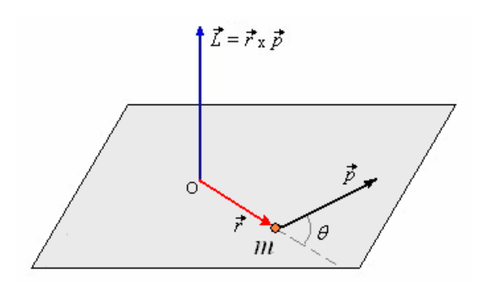
$$t_1 = \frac{m_0 - m_1}{C}$$

Reemplazando t_1 en la expresión anterior encontramos la altura que alcanza en el momento en que el combustible se acaba.

CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR Y MOMENTO DE UNA FUERZA O TORQUE

Consideremos una partícula P de masa m, su posición con respecto al origen O en un instante dado está determinada por el vector $\vec{r}$.

La partícula tiene una velocidad $\vec{v}$ y su cantidad de movimiento lineal es $\vec{p} = m\vec{v}$.



LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR O MOMENTUM ANGULAR $\vec{L}$

Se define como el producto vectorial de $\vec{r}$ y $\vec{p}$,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

La dirección de $\vec{L}$ es perpendicular al plano definido por $\vec{r}$ y $\vec{p}$, su sentido lo da la regla de la mano derecha, su módulo es:

$$L = rp\,\text{sen}\,\theta = rmv\,\text{sen}\,\theta$$

Como $v\text{sen}\,\theta$ es la velocidad tangencial (v_t) y $v_t = \omega r$, siendo ω la velocidad angular. Podemos escribir:

$$L = mr^2\omega$$

MOMENTO DE INERCIA (I).

Llamando Momento de Inercia al producto mr^2,

Tenemos:

$$L = I\,\omega, \text{ vectorialmente } \vec{L} = I\,\vec{\omega}$$

Las dimensiones de la cantidad de movimiento angular son:

$$[L] = [M][L]^2[T]^{-1}$$

Sus unidades en el sistema internacional:

$$\frac{\text{Kg m}^2}{\text{s}} \text{ o J s}$$

Derivando la cantidad de movimiento angular $\vec{L}$ con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{r} \times \vec{p} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Como

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \text{ y } \vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$$

Luego

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Por otra parte si $\vec{F}$ es la fuerza que produce el movimiento de la partícula, por la Segunda Ley de Newton tenemos:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Luego $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$

A esta cantidad que produce un cambio en la cantidad de movimiento angular se le conoce como

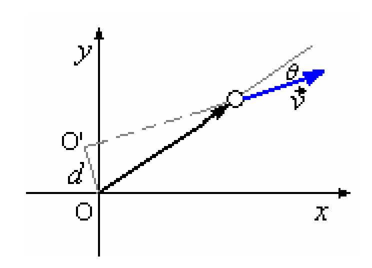
MOMENT0 DE UNA FUERZA o TORQUE $\left(\vec{\tau}\right)$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Tiene como módulo $\tau = rF\,\text{sen}\,\theta$

Su sentido está dado por la regla de la mano derecha.

Ejemplo 27. Una partícula de masa *m* se mueve en el plano *xy* con una velocidad $\vec{v}$ a lo largo de una línea recta. ¿Cuál es la magnitud y dirección de su cantidad de movimiento angular con respecto al origen O?



Solución.

La posici6n de la partícula es $\vec{r}$.

La velocidad de la partícula es $\vec{v}$.

Su cantidad de movimiento lineal es

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Su cantidad de movimiento angular es $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = rmv\text{sen}\theta\left(-\hat{k}\right)$$

La magnitud es: $L = rmv\text{sen}\theta = mvd$, donde $d = r\text{sen}\theta$

Luego $\vec{L} = -(mvd)\hat{k}$

Podemos ver que la cantidad de movimiento angular con respecto a O' es cero.

Ejemplo 28. En determinado instante, la Posición de una partícula con respecto a un origen O de coordenadas está dada por el vector $\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ (en metros) . En ella actúa una fuerza $\vec{F} = 16\hat{i} + 32\hat{j}$ (en Newton) . Encontrar el torque originado por la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre la partícula. Con referencia al origen O.

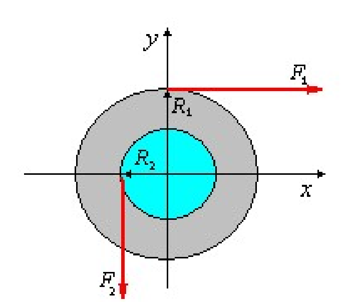
Solución.

El torque es: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \left(3\hat{i} + 4\hat{j}\right) \times \left(16\hat{i} + 32\hat{j}\right)$

$= (3)(32)\hat{k} + (4)(16)\left(-\hat{k}\right) = 96\hat{k} - 64\hat{k}$

$= 32\hat{k}$ Nm

Ejemplo 29. Un cilindro sólido Puede girar alrededor de un eje sin fricción como se ve en la figura. Una cuerda enrollada alrededor del radio exterior R_1 ejerce una fuerza F_1 hacia la derecha. Una segunda cuerda enrollada alrededor de la otra sección cuyo radio es R_2 ejerce una fuerza F_2 hacia abajo. ¿Cuál es el torque que actúa sobre el cilindro alrededor del eje z que pasa por O?



Solución.

Sobre el cilindro actúan:

$\vec{F}_1 = F_1\hat{i}$ en $\vec{r}_1 = R_1\hat{j}$ y $\vec{F}_2 = -F_2\hat{j}$ en $\vec{r}_2 = -R_2\hat{i}$

El torque neto sobre el cilindro es:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = -R_1F_1\hat{k} + R_2F_2\hat{k}$$

$$= \left(R_2F_2 - R_1F_1\right)\hat{k}$$

Si F_1 = 10 N, R_1 = 2 m y F_2 = 5 n, R_2 = 1 m:

$$\vec{\tau} = \left[(5N)(1m) - (10N)(2m)\right]\hat{k} = -15\hat{k} \text{ N m}$$

CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

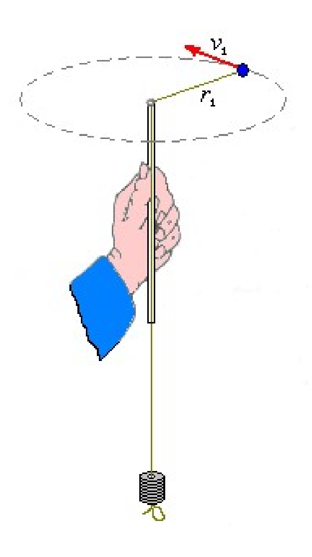
En el caso de una partícula come en la sección anterior, si el torque aplicado con relación a un punto dado de referencia es cero, tenemos que:

$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = 0$, por consiguiente: $\vec{L} = \text{CONSTANTE}$

La cantidad de movimiento angular con respecto al punto de referencia es constante.

Ejemplo 30. Una partícula de, masa *M* en el extremo de un hilo gira con velocidad v_1 cuando el radio es r_1, si disminuimos el radio de r_1 a r_2, ¿qué sucede con la velocidad?

Solución.



La figura indica la forma como se puede realizar esta experiencia, para disminuir el radio basta jalar el hilo.

Aplicando la conservación de la cantidad de movimiento angular:

$$L_{\text{antes}} = L_{\text{después}}$$

$$r_1 M v_1 = r_2 M v_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \frac{r_1}{r_2}$$

También podemos hallar el trabajo realizado para acortar el radio.

$$K_{antes} = \frac{1}{2} M v_1^2 ,$$

$$K_{después} = \frac{1}{2} M v_2^2 = \frac{1}{2} M \left(v_1 \frac{r_1}{r_2} \right)^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 v_1^2$$

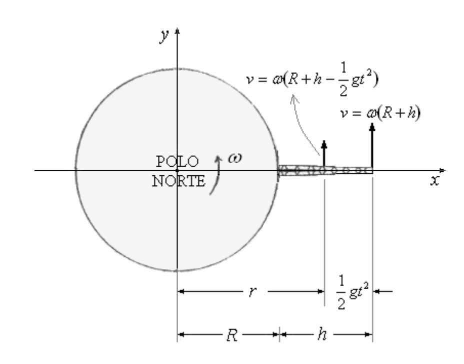
El trabajo realizado es igual al cambio de energía cinética.

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} M \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 v_1^2 - \frac{1}{2} M v_1^2$$

$$= \frac{1}{2} M v_1^2 \left[\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 - 1 \right]$$

Ejemplo 31. Cálculo de la desviación de un cuerpo situado en la línea ecuatorial y que cae desde una altura h.

Solución.



En la figura, sea una partícula de masa *m* a una altura *h* sobre la superficie de la Tierra en un punto que, para simplificar, consideramos que se encuentra sobre el ecuador. Para los casos de interés físico, la altura *h* será por lo común muy pequeña en comparación con el radio, *R* de la Tierra. Si se supone que la partícula parte del reposo en relación a un punto de la superficie de la Tierra verticalmente por debajo de él entonces, inicialmente, el componente radial de la velocidad v_r de la partícula desaparece y su componente tangencial v_θ será $\omega(R + h)$, en donde ω es la velocidad angular de la Tierra. Al soltarse, debido a la atracción gravitacional de la Tierra, la partícula comienza a caer verticalmente hacía abajo y, por ende, su distancia radial r del centro de la Tierra comienza a disminuir. De $L = mrv_\theta$ se deduce que el componente tangencial de su velocidad v_θ debe aumentar este proceso y de modo tal que haga que el producto rv_θ sea constante. En términos más cuantitativos, esto quiere decir que durante su descenso hacia el suelo, la distancia radial *r* y la velocidad tangencial v_θ se deben relacionar por medio de

$$mrv_\theta = m\omega(R+h)^2 \qquad (1)$$

Puesto que, inicialmente, la velocidad de la partícula es $\omega(R + h)$, de tal modo que su cantidad de movimiento angular *L* en relación al centro de la Tierra es $m\omega(R + h)^2$ Anticipándonos al hecho de que la desviación hacia el este será muy pequeña, podemos escribir para la distancia radial *r* del cuerpo al centro de la Tierra en cualquier instante t,

$$r = R + h - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (2)$$

Y al sustituir esto en (1) obtenemos:

$$v_\theta = \frac{\omega(R+h)^2}{R+h-\frac{1}{2}gt^2} = \frac{\omega(R_o+h)}{\left[1-\frac{1}{2}gt^2/(R+h)\right]} \qquad (3)$$

Para calcular la magnitud de la desviación hacia el este, sea v_y en el instante *t,* la velocidad del cuerpo que cae en la dirección hacia el este, tal y como lo ve un observador fijo con respecto a la superficie de la Tierra. Entonces

$$v_y = v_o - r\omega$$

$$= \frac{\omega(R_o+h)}{\left[1-\frac{1}{2}gt^2/(R+h)\right]} - (R+h-\frac{1}{2}gt^2)\omega$$

$$= (R+h)\omega\left[1+\frac{\frac{1}{2}gt^2}{R+h}\right] - (R+h)\omega + \frac{1}{2}gt^2\omega$$

$$= gt^2\omega$$

Donde la segunda igualdad se obtiene de la utilización de (2) y (3) y la tercera, a continuación, mediante el hecho de que $gt^2 << (R+h)$ y el empleo del teorema binomial. Al integrar esta fórmula para v_y se obtiene, para la desviación total hacia el este y en el instante t,

$$y = \frac{1}{3}gt^3\omega .$$

Finalmente, puesto que el tiempo que necesita la partícula para caer la distancia *h* es de $(2hg)^{1/2}$, la deflexión total hacia el este *d*, se puede expresar como sigue

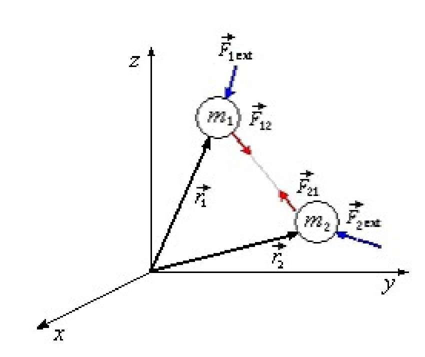
$$d = \frac{2}{3}\omega h\sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (4)$$

Por ejemplo, si se deja caer una partícula desde una altura de 100 metros, su desviación hacia el este, según esta fórmula, se descubre que es (al sustituir los valores h = 100 metros y $\omega = 7,2 \times 10^{-5}$rad/s) de 2,2 cm. Esta desviación es muy pequeña y sólo se puede observar en condiciones controladas cuidadosamente.

Es importante recordar la base física para la deflexión pronosticada en (4). Conforme la partícula desciende hacia la superficie de la Tierra su velocidad tangencial v_θ debe aumentar para que el producto rv_θ sea constante. Por consiguiente, de esto se desprende que su velocidad tangencial debe sobrepasar a la del punto de la superficie que se encontraba inicial e inmediatamente por debajo, y, en esta forma, se desvía hacia el este.

CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTICULAS.

Vamos a considerar un sistema de dos partículas, como se muestra en la figura.



Para la partícula 1: $\vec{\tau}_1 = \frac{d\vec{L}_1}{dt}$, donde

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{r}_1 \times \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{1ext}\right)$$

$\vec{F}_1$ Es la fuerza total sobre la partícula 1.

$\vec{F}_{12}$ Es la fuerza ejercida por la partícula 2 y

$\vec{F}_{1\,ext}$ Es la suma de las fuerzas externas sobre la partícula 1.

$$\vec{\tau}_1 = \frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1\,ext} = \vec{\tau}_{12} + \vec{\tau}_{1\,ext}$$

Similarmente para partícula 2.

$$\vec{\tau}_2 = \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2\,ext} = \vec{\tau}_{21} + \vec{\tau}_{2\,ext}$$

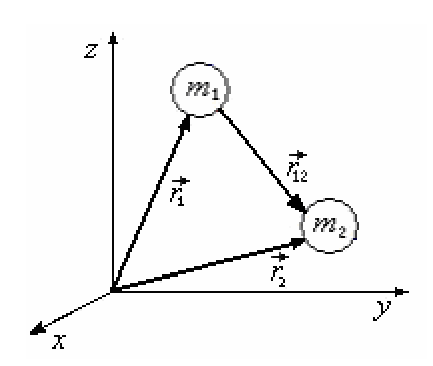
Sumando $\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \frac{d\vec{L}_{total}}{dt}$

Para los Torques internos tenemos:

$$\vec{\tau}_{12} + \vec{\tau}_{21} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}$$

Como $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

$$\vec{\tau}_{12}+\vec{\tau}_{21}=\vec{r}_1\times\vec{F}_{12}-\vec{r}_2\times\vec{F}_{12}=\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)\times\vec{F}_{12}$$



De la figura: $\vec{r}_1+\vec{r}_{12}=\vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r}_1-\vec{r}_2=\vec{r}_{12}$

Reemplazando

$$\vec{\tau}_{12}+\vec{\tau}_{21}=-\vec{r}_{12}\times\vec{F}_{12}$$

Como $\vec{r}_{12}$ y $\vec{F}_{12}$ son paralelos: $\vec{r}_{12}\times\vec{F}_{12}=0$, y

$$\vec{\tau}_{12}+\vec{\tau}_{21}=0$$

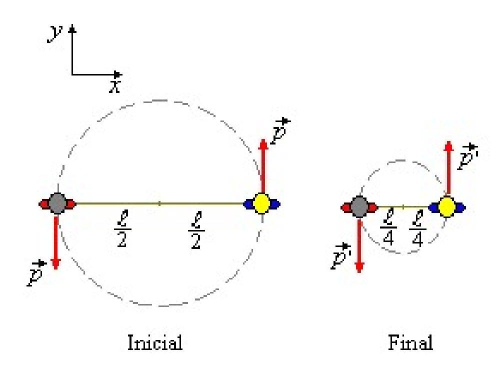
De aquí: $\vec{\tau}_{1\,ext}+\vec{\tau}_{2\,ext}=\dfrac{d\vec{L}_{total}}{dt}$ y $\vec{\tau}_{ext}=\dfrac{d\vec{L}_{total}}{dt}$

Vemos si $\vec{\tau}_{ext}=0 \Rightarrow \vec{L}_{total}=\text{CONSTANTE}$, independiente del tiempo.

Ejemplo 32. Dos hombres se encuentran en una pista de patinaje, ambos sostienen una cuerda de longitud ℓ. ¿Qué pasa con la cantidad de movimiento lineal $\vec{p}$ de cada uno de ellos, si ambos jalan la cuerda y acortan la distancia entre ellos a $\ell/2$? Asumir que se mueven en círculo y que la magnitud de sus cantidades de movimiento son iguales.

Solución.

Las únicas fuerzas externas al sistema son la fuerza de la gravedad y la reacción normal del piso, estas fuerzas se cancelan. Las únicas fuerzas que, intervienen en el sistema son las internas, por lo tanto la cantidad de movimiento angular del sistema se conserva.



Al estar sujetos los dos hombres a la cuerda su movimiento es circular y si consideramos que el piso está en el plano xy,

Tenemos:

$$\vec{L}_{inicial}=2\frac{\ell}{2}p\hat{k}=\ell p\hat{k},$$

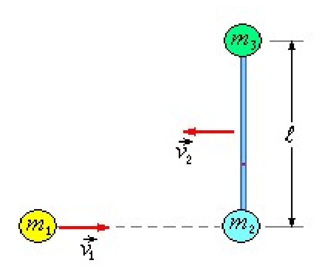
$$\vec{L}_{final}=2\frac{\ell}{4}p'\hat{k}=\frac{\ell p'}{2}\hat{k}$$

Como $\vec{L}_{inicial}=\vec{L}_{final} \Rightarrow \vec{p}'=2\vec{p}$

La cantidad de movimiento lineal final de cada hombre es el doble de la cantidad de movimiento lineal inicial.

CONSTANTE, Independiente, del tiempo

Ejemplo 33. Una partícula de masa m_1 se desplaza sobre un plano horizontal con velocidad $\vec{v}_1$. Dos partículas de masas m_2 y m_3 unidas por una varilla de masa despreciable se mueven con velocidad $\vec{v}_2$, como se indica en la figura.



Suponiendo un choque totalmente plástico entre m_1 y m_2

$m_1 = m_2 = m_3 = 1$ kg, $\vec{v}_1=20\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\hat{i}$, $\vec{v}_2=-10\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\hat{i}$,

$\ell = 1\text{m}$

Calcular:

a) La posición del centro de masa respecto a la masa m_2 en el momento del choque.

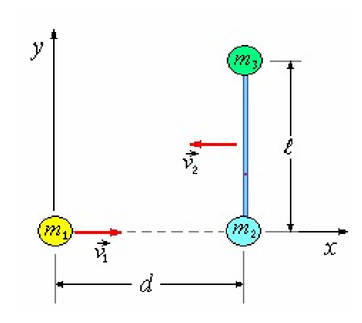
b) La ley del movimiento del centro de masa.

c.) La velocidad angular de rotación alrededor del centro de masa después del choque.

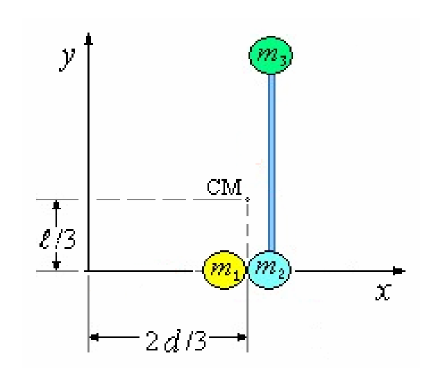
Solución.

a) En el momento del choque, tomando como referencia la posición de m_2, el centro de masa está en:

Posición en el instante partida (t = 0).



Posición en el instante de encuentro.



$$x_{CM} = \frac{m_1\left(\frac{2d}{3}\right) + m_2\left(\frac{2d}{3}\right) + m_3\left(\frac{2d}{3}\right)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{m(2d)}{3m} = \frac{2d}{3}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1(0) + m_2(0) + m_3(\ell)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{\ell}{3} = \frac{1}{3}\text{ m}$$

b) Como parten del reposo, la cantidad de movimiento total del sistema es cero.

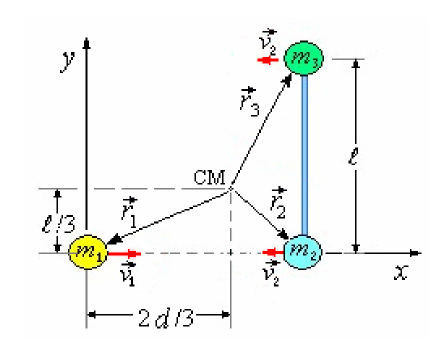
$$\vec{P}_{total} = M\vec{v}_{cm} = 0$$

Como $\vec{v}_{cm} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{cm} \therefore \vec{r}_{cm}$ = constante.

El centro de masa permanece en la misma posición.

c) Consideremos la cantidad de movimiento angular con respecto al centro de masa antes y después del choque.

Antes del choque.



$$\vec{L} = \vec{r}_{1cm} \times \vec{p}_1 + \vec{r}_{2cm} \times \vec{p}_2 + \vec{r}_{3cm} \times \vec{p}_3$$

$$\vec{r}_{1cm} = -\frac{2d}{3}\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j},\ \vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 = 20\hat{i}$$

$$\vec{r}_{2cm} = (d - v_2 t)\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j},\ \vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 = -10\hat{i}$$

$$\vec{r}_{3cm} = (d - v_2 t)\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j},\ \vec{p}_3 = m_3\vec{v}_2 = 20\hat{i}$$

Nota: En los vectores posición ($\vec{r}_{1cm}, \vec{r}_{2cm}, \vec{r}_{3cm}$) solo ponemos la posición en el eje y, porque la posición en x se va a anular con el producto vectorial.

Reemplazando:

$$\vec{L} = \left(-\frac{1}{3}\hat{j}\right)\times(20\hat{i}) + \left(-\frac{1}{3}\hat{j}\right)\times(-10\hat{i}) + \left(\frac{2}{3}\hat{j}\right)\times(-10\hat{i})$$

$$\vec{L} = \frac{20}{3}\hat{k} - \frac{10}{3}\hat{k} + \frac{20}{3}\hat{k} = 10\hat{k}$$

Después del choque:

Como después del choque el sistema gira alrededor del centro de masa con velocidad angular $\vec{\omega}$, podemos expresar la cantidad de movimiento angular en función del momento de inercia.

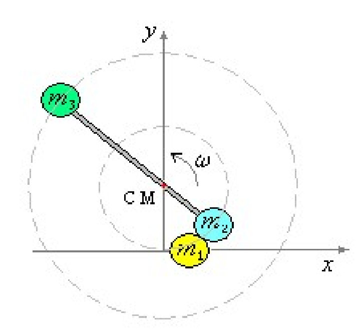
$$\vec{L}' = I\vec{\omega},\ I = I_1 + I_2 + I_3 \Rightarrow$$

$$I = m_1\left(\frac{\ell}{3}\right)^2 + m_2\left(\frac{\ell}{3}\right)^2 + m_3\left(\frac{2\ell}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

luego $\vec{L}' = \frac{2}{3}\vec{\omega}$

Por conservación de la cantidad de movimiento angular $\vec{L}' = \vec{L}$

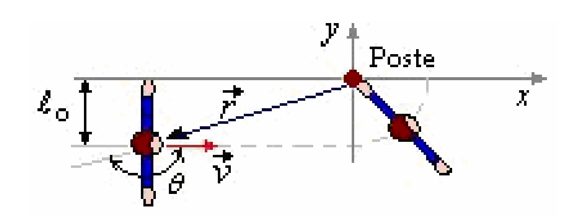
$$10\hat{k} = \frac{2}{3}\vec{\omega} \Rightarrow \vec{\omega} = 15\hat{k}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



Ejemplo 34. Un muchacho va corriendo por la acera con una velocidad constante *v* con sus brazos estirados perpendicularmente a su recorrido. La distancia entre los extremos de los dedos de sus manos es $2\ell_0$. Cuando al correr pasa junto a un poste, se coge al mismo con la mano izquierda, levanta los pies del suelo, y gira por aire alrededor del poste.

a) Si su masa es, *M*. ¿Cuál es el valor de su cantidad de movimiento angular respecto al poste cuando corre por la acera?

b) Si la fuerza de reacción del poste no só1o lo hace girar, sino que además proporciona una fuerza impulsiva que hace frenar ligeramente su movimiento hacia adelante, de modo que su energía cinética se reduce a los cuatro quintos de su valor original. ¿Cuál es su momento de inercia respecto al poste?



Solución.

a) La cantidad de movimiento con que se acerca el muchacho es:

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = rmv\,\text{sen}\,\theta\hat{k}$$

Como $r\,\text{sen}\,\theta = \ell_0 \Rightarrow \vec{L} = m\ell_0 v\hat{k}$

b) Cuando el muchacho se coge del poste, las fuerzas de reacción centrípeta e impulsiva deben pasar por el poste por lo tanto no ejercen ningún torque sobre el muchacho y la cantidad movimiento angular se conserva.

$$\vec{L} = m\ell_0 v\hat{k} = \text{constante}$$

La energía cinética después de cogerse del poste es $K' = \frac{4}{5}K$.

K es la energía cinética antes de cogerse, $K = \frac{1}{2}mv^2$

Luego:

$$K' = \frac{4}{5}K = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{2}{5}mv^2 \quad (1)$$

También $K' = \frac{1}{2}I\omega^2$, como $\vec{L} = I\omega\hat{k} \Rightarrow$

$$\omega = \frac{L}{I}$$

Reemplazando éste valor de ω en *K'* :

$$K' = \frac{L^2}{2I} = \frac{(m\ell_0 v)^2}{2I} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2)

$$\frac{2}{5}mv^2 = \frac{(m\ell_0 v)^2}{2I}$$

Luego su momento de inercia es $I = \frac{5}{4}m\ell_0^2$

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Una masa m_1 se sitúa en (x_1, y_1, z_1) y otra masa m_2 en (x_2, y_2, z_2).
a) Hallar 1a distancia r_0 entre m_1 y m_2.
b) Hallar la distancia r_1 entre m_1 y el centro de masa.
c) Hallar la distancia r_2 entre m_2 y et centro de masa.
Respuesta. a)

$$r_0 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

b) $r_1 = \dfrac{m_2 r_0}{(m_1 + m_2)}$, c) $r_2 = \dfrac{m_1 r_0}{(m_1 + m_2)}$

2. Dos partículas de masas m_1 = 1 kg y m_2 = 3 kg se mueven por el espacio, sus vectores posición Son:

$\vec{r}_1 = 3\hat{i} + t\hat{j} - \sqrt{t}\hat{k}$, $\vec{r}_2 = \text{sen}\, t^2\hat{i} + \hat{k}$

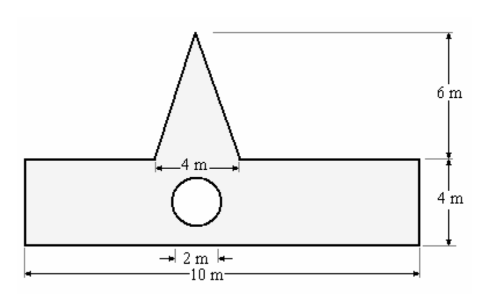
a) Hallar el centro de masa.
b) ¿Cuál es su aceleración?
c) Hallar su aceleración vista por un observador que se mueve con velocidad constante $\vec{v} = \hat{j} + 3\hat{k}$.
Respuesta. a)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{4}\left[\left(3 + 3\text{sen}\, t^2\right)\hat{i} + t\hat{j} + \left(3t - \sqrt{t}\right)\hat{k}\right]$$

b) $\vec{a}_{CM} = \frac{1}{2}\left(\cos t^2 + 2t^2\text{sen}\, t^2\right)\hat{i} + \frac{1}{16}t\hat{k}$

c) igual que b)

3. Encontrar el centro de masa de una lámina delgada mostrada en la figura

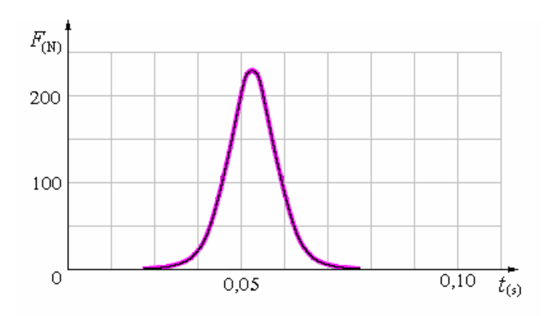


Respuesta. y = 0,983m encima del centro del orificio

4. Una fuerza $\vec{F} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$ actúa sobre un cuerpo en el intervalo de $0 \le t \le 6s$. Hallar el impulso sobre el cuerpo.

Respuesta. 181 + 72j + 324l$18\hat{i} + 72\hat{j} + 324\hat{k}$

5. Suponga que la fuerza que actúa sobre una pelota de tenis (m = 0,060 kg) en función del tiempo está dada por la gráfica de la figura. Usando métodos gráficos estime:
a) El impulso total dado a la bola.
b) La velocidad de ésta después de haber sido golpeada, suponiendo que estaba en reposo en el momento de ser golpeada.

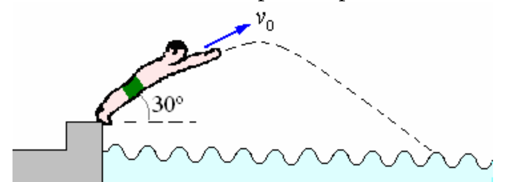


Respuesta. a) 4,5 Ns b) 75 m/s

6. Un flujo de partículas idénticas de masa m y velocidad uniforme $\vec{v}$, inciden sobre un plano fijo de área A, la dirección forma un ángulo θ con la normal. Después del choque las partículas tienen una velocidad $\vec{v}'$, la dirección es simétrica a la de $\vec{v}$.
También $\vec{v} = \vec{v}'$.
a) Calcular el Impulso que se ejerce sobre cada partícula en el momento del choque.
b) Calcular el valor de la fuerza comunicada a la superficie por unidad de tiempo. Siendo n el numero de partículas por unidad de volumen de chorro incidente.

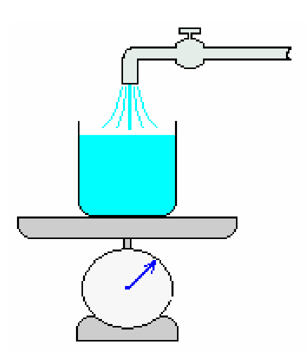
Respuesta. a) $\vec{J} = (2v\cos\theta)\hat{n}$,
b) $F = 2nAmv^2\cos^2\theta$

7. Un nadador de 70 kg se lanza al agua desde el podio de una piscina con una velocidad de 3m/s en la dirección de la figura. Calcular la fuerza ejercida sobre el podio durante los 0,8s que el nadador ejerce el esfuerzo sobre el mismo para impulsarse en el salto.



Respuesta. $\vec{F} = \left(-227\hat{i} - 818\hat{j}\right)\text{N}$

8. Un recipiente de 0,25 kg con capacidad para 5 kg de agua se llena de un caño en 5 s. En el instante en que el recipiente está medio lleno, la balanza lee 3,0 kg. Si no se salpica el agua, ¿Cuál es la velocidad del agua que cae en dicho instante.



Respuesta. 2,45 m/s

9. Una bala de fusil de masa *m* y de velocidad constante v_0, penetra en un bloque de madera fijo; la bala se detiene después de recorrer una distancia *d* con un movimiento uniformemente retardado.
e) Calcular la desaceleración a de la bala, deducir la fuerza de desaceleración.
b) Calcular el tiempo de desaceleración.
c) ¿Cuál es el impulso comunicado a la bala por el bloque? Comparar con la cantidad de movimiento de la bala antes del choque.
Realizar la aplicación numérica para v_0 = 600 m/s, *d* =30 cm, *m* = 40 g

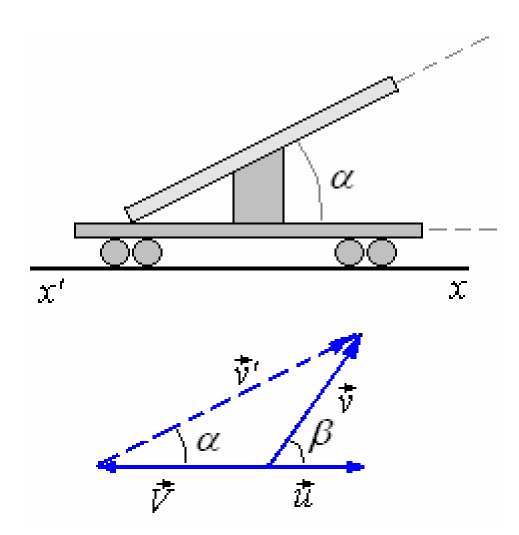
Respuesta. a) $a = \dfrac{v_0^2}{2d} = 6\times 10^5\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

$F = ma = 24\times 10^7\ \text{N}$,

b) $t = \dfrac{v_0}{a} = 10^{-3} s$

c) $J = F\, t = 24$ N, $J = mv_0$

10. Un cañón fijo sobre un vagón que se puede desplazar si fricción sobre una vía rectilínea horizontal con una masa total *M*. El cañón forma un ángulo α con la horizontal.
a) Si el vagón está en reposo el cañón dispara un obús de masa *m*, determinar la relación entre las velocidades *v* y *V* del obús y del cañón.
b) Si la velocidad del obús relativa al cañón es *v'* (forma un ángulo θ con V), determinar la relación entre v' y V.
c) El vagón se desplaza con una velocidad rectilínea constante *u* sobre la vía antes del disparo. El obús tiene una velocidad *v* relativa al cañón en movimiento a la velocidad *V* después del disparo:
Calcular la variación de la velocidad (*u* - *v*) del vagón
Encontrar la velocidad $\vec{v}$ del obús.
d) Deducir del cálculo anterior el alcance *R* del obús.



Respuesta. a) $v = -\dfrac{M}{m}\dfrac{V}{\cos\alpha}$,

b) $v' = -\left(1 + \dfrac{M}{m}\right)\dfrac{V}{\cos\beta}$,

c) $u - v = \dfrac{m}{m+M} v'\cos\beta$,

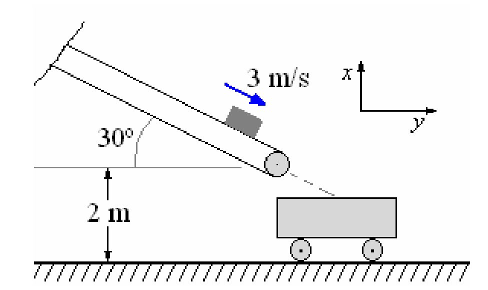
$\vec{v} = (u + Mv'\cos\beta)\hat{i} + v'\text{sen}\beta\hat{j}$

d) $R = \dfrac{2v^2}{g}\text{sen}\beta\left(u + \dfrac{Mv^2}{M+m}\cos\beta\right)$

11. Desde la plataforma de un tren que se mueve con una velocidad de 10 m/s se arroja un paquete de 25 kg, Este es cogido en el aire por una persona que está junto a la vía. Desde el tren se observa que esta persona retrocede con una velocidad de 7,5 m/s. ¿Cuál es la masa de la persona?
Respuesta. 75 kg.

12. Un muchacho está en medio de un lago congelado sin fricción de tal manera que no puede moverse. Para poder salir él lanza su sombrero de masa 0,5 kg hacia el norte con una velocidad de 12 m/s a 53' con la horizontal. Si la masa del muchacho es 60 kg y el radio del lago es 400 metros. ¿Qué pasa7
Respuesta. El muchacho resbala hacia el sur y llega a la orilla 1 h 51 min después.

13. Un paquete de 10 kg se descarga de una cinta transportadora con una velocidad de 3 m/s y cae en una vagoneta de 25 kg. ¿Si la vagoneta está inicialmente en reposo y puede rodar libremente, Cuál es su velocidad final?

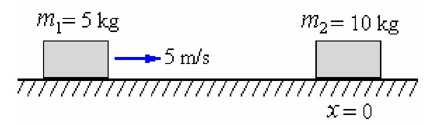


Respuesta. $v = 0{,}732\ \hat{i}$ m/s

14. Un hombre de 75 kg se lanza al agua desde la proa de su bote de 50 kg. La componente horizontal de su movimiento es 1 m/s respecto al bote. Hallar las velocidades del hombre y del bote respecto a un observador en el muelle.
a) Si el bote está inicialmente en reposo
b) Si el bote se movía inicialmente hacia adelante con una velocidad de 2 m/s. No considerar pérdidas de energía debido al agua
Respuesta. a) v_1 = 0,4 m/s , v_2 = 0,6 m/s
b) v_1 = 2,4 m/s , v_2 = 1,4 m/s

15. Un cañón dispara un obús de 2,4 kg hacia arriba. A1canza su máxima altura, 313,6 m y se parte en dos, 0,8 kg y 1,6kg. Las dos partes llegan a tierra simultáneamente. La pieza de 1,6 kg toca tierra a 480 m de la explosión (medida a lo largo del eje x).
a) ¿Cuánto tiempo tomaría al obús volver a tierra si no se hubiera partido?
b) ¿Cuál es la velocidad de cada una de las piezas justamente después de la explosión?
c) Encontrar la cantidad de movimiento de cada pieza justamente antes de tocar tierra.
Respuesta. a) 8 segundos
b) $\vec{v}_{(1,6)} = 60\hat{i}$ m/s (16), $\vec{v}_{(0,8)} = -120\hat{i}$ m/s
c) $\vec{p}_{(1,6)} = 96\hat{i} - 125{,}44\hat{j}$ kg.m/s ,
$\vec{p}_{(0,8)} = -96\hat{i} - 62{,}72\hat{j}$ kg.m/s
(El movimiento es en el plano xy; g = 9,8 m/s^2)

16. Un bloque de masa 10 kg está en reposo en el origen segundo con masa 5 kg se mueve a lo largo del eje x con velocidad de magnitud v_0 = 5 m/s. Los bloques choca quedan unidos. y se mueven en el eje x. La superficie tiene fricción despreciable.
a) ¿Cuando el bloque de 5 kg está en x = -10 donde está centro de masa?
b) Encontrar la cantidad de movimiento de la masa de 5 kg, de la masa de 10kg y del centro de masa antes del choque.
c) ¿Cuál es la velocidad del sistema combinado?

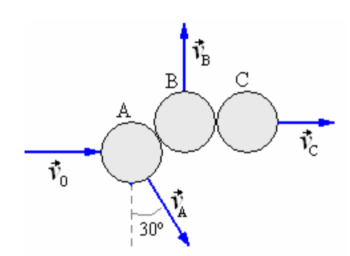


Respuesta. a) x_{CM} = - 3 1/3 m,
b) $\vec{p}_1 = 25\ \hat{i}$ kg.m/s, $\vec{p}_2 = 0$, $\vec{p}_{CM} = 25\ \hat{i}$ kg.m/s
c) $\vec{v} = 1\ 2/3\ \hat{i}$ m/s

17. Dos bolas P_1 y P_2 de masas m_1 y m_2 están suspendidas del cielorraso por dos hilos inextensibles de la misma longitud ℓ ; P_1 y P_2 están en contacto sin presión con los hilos verticales.
Se saca P_1 de la posición de equilibrio a un ángulo θ_0 manteniendo el hilo tenso, luego se suelta sobre P_2.
Calcular:
a) La velocidad de P_1 justo antes del choque.
b) Las velocidades v'_1 y v'_2 de P_1 y P_2 inmediatamente después del choque perfectamente elástico. Discutir este resultado para valores relativos de las masas m_1 y m_2.
c) Las alturas de las posiciones limites de P_1 y P_2 después del choque.
Aplicación numérica; $\ell = 1$ m . θ_0 = 60º, $m_2 = m_1/2$
Respuesta. a) $v_1 = \sqrt{2g\ell\cos\theta_0}$, $v_1 = 3{,}13$ m/s ,
b) $v'_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$, $v'_1 = 1{,}05$ m/s

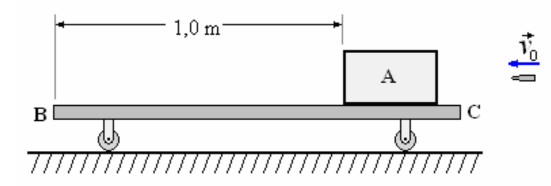
Para $m_1 > m_2$ v_1 y v'_1 tienen el mismo sentido.
Para $m_2 > m_1$ v'_1 tiene sentido contrario de v_1 .
$v'_2 = \dfrac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$, $v'_2 = 4{,}22$ m/s
v'_2 en todo caso tiene el mismo sentido que v_1
c) $h_1 = \dfrac{v'^2_1}{2g} = 0{,}056$ m , $h_2 = \dfrac{v'^2_2}{2g} = 0{,}91$ m

18. En un Juego de billar, la bola A está moviéndose con 1a velocidad $\vec{v}_0$ = 31 m/s cuando choca con las bolas B y C que están juntas en reposo. Tras el choque, se observan la tres bolas moviéndose en las direcciones que muestra 1a figura, con θ = 30º. Suponiendo Superficies lisas y choques perfectamente elásticos, hallar los módulos de la velocidades, $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ y $\vec{v}_C$.



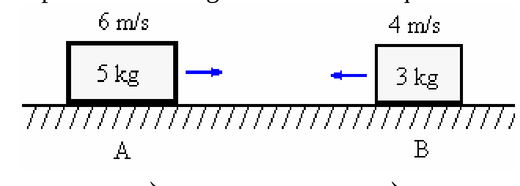
Respuesta. v_A = 1,5 m/s , v_B = 1,29 m/s , $\vec{v}_C$ 2,25 m/s

19. Se dispara una bala de 39 g con una velocidad de 500 m/ contra un bloque A de 5 kg de El coeficiente de rozamiento entre el bloque A y la plataforma es 0,5. Si la masa de la plataforma es 4 kg y puede rodar libremente, hallar:
a) La velocidad final de la plataforma y e1 bloque.
b) La posición final del bloque sobre la plataforma.



Respuesta. a) 2,16 m/s b) El bloque se detiene a 0,33 m de B.

20. La figura muestra dos masas sobre una superficie con rozamiento despreciable. El coeficiente de restitución entre Las dos masas es 0,73; determinar:
a) Sus velocidades después del choque.
b) La pérdida de energía durante el choque.

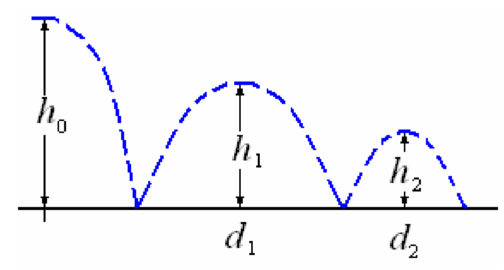


Respuesta: a) $\vec{v}_A$ = - 0,563 $\hat{i}$ m/s, $\vec{v}_B$ = 6,94 $\hat{i}$ m/s
b) ΔK = 41 J

21. Se deja caer una pelota al suelo desde una altura *y*. Si el coeficiente de restitución es ε, escribir expresiones para el tiempo total que tardará la pelota en dejar de dar bote y la distancia total que recorrerá en este tiempo.

Respuesta. $t = \sqrt{\dfrac{2y}{g}}\dfrac{(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)}$, $s = y\dfrac{(1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)}$

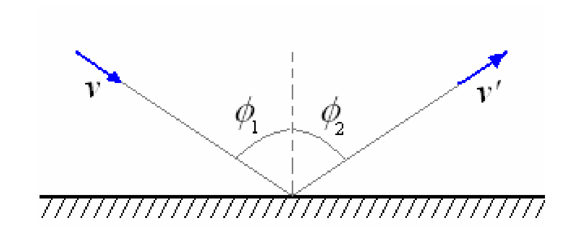
22. Una bola cae desde una altura h = 0,900 m sobre una superficie lisa. Si la altura del primer rebote es h_1 = 0,800 m y la distancia d_1 = 0,400 m, calcular:
a) El coeficiente de restitución.
b) La altura y longitud del segundo rebote.



Respuesta. a) 0,943 m, b) 0,711 m, 0,37 m

23. Un objeto de 5 kg que se mueve con una velocidad de 1,2 m/s choca directamente con un objeto de 20 kg que está en reposo. Se observa que el objeto menor rebota con una velocidad de 0,6 m/s
a) ¿Cuál es la pérdida de energía cinética por el impacto?
b) ¿Cuál es el coeficiente de restitución?
Respuesta: a) ΔK = - 0,675 J, b) ε = 0,875

24. Una bola choca contra un plano liso formando un ángulo ϕ_1 con la normal del mismo y rebota con un ángulo ϕ_2. Encontrar La expresión correspondiente al coeficiente de restitución



Respuesta. $\varepsilon = \dfrac{\tan\phi_1}{\tan\phi_2}$

25. Ira partícula de masa m_1 tiene un choque frontal perfectamente elástico con una partícula de masa m_2 inicialmente en reposo. ¿Cuál es la pérdida relativa de energía cinética correspondiente a la partícula . m_1

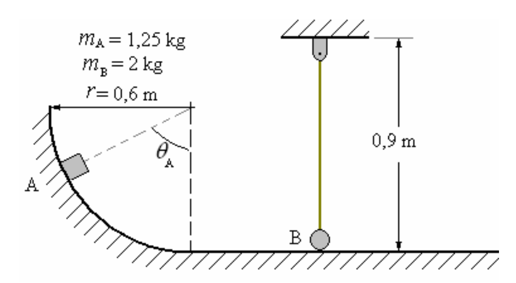
Respuesta. $\dfrac{\Delta K}{K} = 4\dfrac{m_1}{m_2\left(1+\dfrac{m_1}{m_2}\right)^2}$

26. Una masa m_1 se mueve a lo largo del eje *x* con una velocidad v_0 a lo largo de una mesa sin fricción. Choca con otra nasa, la cual está inicialmente en reposo. La masa m_2 sale a lo largo del eje *y*. Si se pierde la mitad de la energía cinética original en el choque.
¿Cual es el módulo de la velocidad y con que ángulo sale después de la colisión?

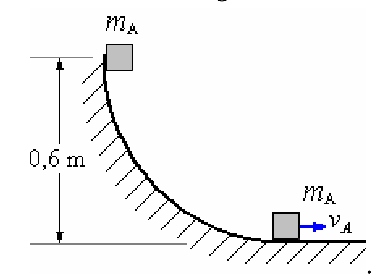
Respuesta. $v_2 = m_1 v_0 \sqrt{\dfrac{3}{2\left(m_2^2 + m_1 m_2\right)}}$,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{m_1 v_0}{m_2 v_2}\right) = \cos^{-1}\left[\frac{2}{3}\frac{(m_1 + m_2)}{m_2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

27. Se deja en libertad el bloque A cuando θ_A = 90 y desliza sin rozamiento, hasta chocar con la bola B. Si el coeficiente de restitución es 0,90, calcular
a) La velocidad de B inmediatamente después del choque.
b) La máxima tracción que soporta el hilo que sostiene a B
c) La altura máxima a la que se eleva B.



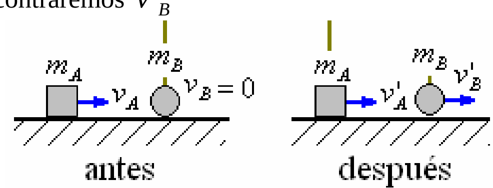
Solución.
a) Por conservación de energía encontraremos v_A.



$$m_A g r = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \Rightarrow$$

$$v_A = \sqrt{2gr} = \sqrt{2(9,8)(0,6)}$$
= 3,43 m/s

Por conservación de la cantidad de movimiento encontraremos v'_B



v_A = 3,43 m/s v_B = 0

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \Rightarrow$$

$$(1,25)(3,43) = 1,25 v'_A + 2 v_B \Rightarrow$$

$$v'_A + 1,6 v'_B = 3,43 \quad (1)$$

El coeficiente de restitución es 0,90

$$\varepsilon = -\frac{(v'_2 - v'_1)}{(v_2 - v_1)} = \frac{v'_B - v'_A}{v_A} = 0,9$$

$$\frac{v'_B - v'_A}{v_A} = 0,9 \Rightarrow \frac{v'_B - v'_A}{3,43} = 0,9 \Rightarrow$$

$$v'_B - v'_A = 0,9(3,43) = 3,09 \quad (2)$$

Sumando (1) y (2):

$$v'_B + 1,6 v'_B = 3,09 + 3,43$$

La velocidad de B inmediatamente después del choque es

v'_B = 2,51 m/s

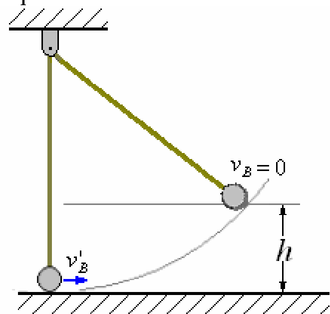
b) El diagrama del cuerpo libre de B, inmediatamente después del choque

$$\sum F_r = m_B a_c \Rightarrow T - m_B g = m_B \frac{v'^2_B}{0,9} \Rightarrow$$

$$T = m_B\left(\frac{v'^2_B}{0,9} + g\right)$$

$$= 2\left(\frac{2,51^2}{0,9} + 9,8\right) = 33,6 \text{ N}$$

c) Por conservación de energía encontramos la altura máxima a la que se eleva B.



$$\frac{1}{2} m_B v'^2_B = m_B g h \Rightarrow$$

$$h = \frac{v'^2_B}{2g} = \frac{2,51^2}{2(9,8)} = 0,321 \text{ m}$$

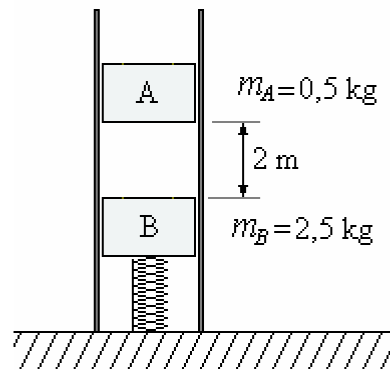
28. Un bloque de masa *M* está en reposo sobre una masa sin fricción. Lo podemos golpear con un bloque que se quede adherido o con un bloque muy duro con el que se producirá un choque perfectamente elástico. Ambos bloques tienen masa *m* y pueden ser lanzados can velocidad V_0 ¿En cuál de los casos el bloque *M* se moverá más rápidamente? (considerar el movimiento en una sola dimensión).

Respuesta. a) $v'_2 = \dfrac{m}{m + M} V_0$,

b) $v'_2 = \dfrac{2m}{m + M} V_0$

En el segundo caso es el doble que en el primero.

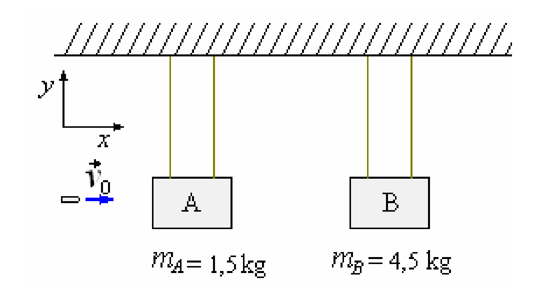
29. Un cilindro A cae sobre otro B apoyado sobre un resorte de constante k = 3000 N/m desde una altura de 2m. Si el choque es perfectamente plástico, calcular:
a) El desplazamiento máximo de B.
b) La pérdida de energía en el choque.



Respuesta. a) 3,47 cm , b) 8,18 J

30. Los parachoques se diseñan de tal manera que un automóvil de 1600 g que golpea una pared rígida a la velocidad de 12 km/h no sufra daño. Suponiendo que ese choque es perfectamente plástico. Calcular:
a) La energía absorbida por el parachoques durante el impacto.
b) La velocidad a la que el automóvil puede golpear a otro de iguales características, que está en reposo sin dañarse.
Respuesta. a) 8890 J b) 24 km/h

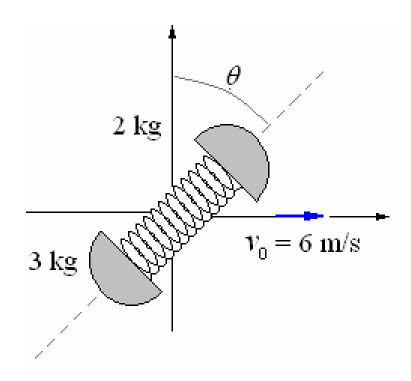
31. Se dispara una bala de 25g en dirección horizontal. La bala atraviesa el bloque A y queda alojada dentro de bloque B. Por dicha causa los bloques A y B comienzan a moverse con velocidades iniciales de 2,4 y 1.8 m/s. respectivamente.
Hallar:
a) La velocidad inicial v_0 de la bala.
b) La velocidad de la bala en el trayecto entre el bloque A y el B.



Respuesta. a) $470\hat{i}\ m/s$ b) 3261 m/s

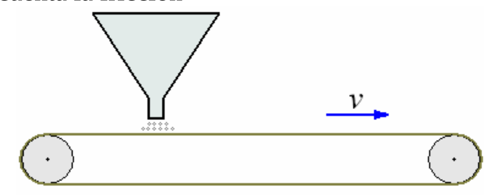
32. Una explosión rompe un objeto en dos piezas una de las cuales tiene 1,5 veces la masa de la otra. Si se liberan 4500 J en la explosión. ¿Cuánta energía cinética adquiere cada pedazo?
Respuesta. 1800 J, 2700 J

33. Cuando se rompe la cuerda que une las partículas A y B, el resorte comprimido las obliga a separarse (el resorte no está unido a las partículas). La energía potencial del resorte comprimido es de 60 J y el conjunto posee la velocidad inicial $\vec{v}_0$ Si se rompe la cuerda cuando $\theta = 30^\circ$, hallar la velocidad resultante de cada partícula



Respuesta. $\vec{v}_A = 9\hat{i} + 5{,}2\hat{j}$ m/s y $\vec{v}_B = 4\hat{i} - 3{,}5\hat{j}$ m/s

34. Un depósito suelta arena a una banda transportadora razón de 75 kg/s. Si la banda se mueve con una rapidez constate v = 2,2 m/s. ¿Qué fuerza se necesita para mantenerla en movimiento? No tomar en cuenta la fricción



Respuesta. 165 N

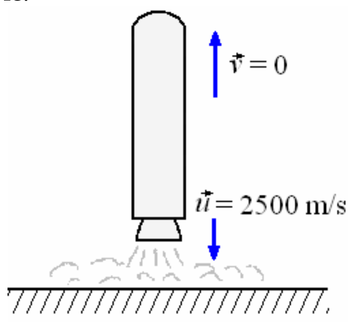
35. Un trineo lleno de arena se desliza sin fricción por una pendiente de 30º. La arena se escapa por un agujero en el trineo a un ritmo de 2 kg/s. Si el trineo parte del reposo con una masa inicial de 40 kg. ¿Cuánto tardó en recorrer 120m a lo largo de la pendiente?
Respuesta. 7 segundos

36. Un cohete que consume combustible a un ritmo constante k se encuentra sometido a la acción de una fuerza externa constante de valor F además de la fuerza de reacción de los gases. La masa inicial del cohete más combustible es m_0. La configuración de la tobera de escape es de tal manera que la velocidad relativa de los gases es igual al negativo de la velocidad v del cohete.
a) Escribir la ecuación del movimiento.
b) Obtener $v_{(t)}$.

Respuesta. a) $F = (m_0 - kt)\dfrac{dv}{dt} - kv$,

b) $v_{(t)} = \dfrac{Ft}{m_0}$

37. Un cohete experimental se proyecta de forma que pueda mantenerse inmóvil sobre el suelo. El cuerpo del cohete tiene una masa de 1200 kg y la carga de combustible inicial es de 3600 kg,. e1 combustible se quema y se expulsa con una velocidad de 2500 m/s. Hallar la velocidad de consumo de combustible necesario.
a) en el momento de encender el cohete.
b) cuando se consume la última partícula de combustible.



Respuesta. a) 18,84 kg/s . b) 4.71 kg/s

38. Una bala de masa *m* se dispara con una velocidad $\vec{v}_B = -v_B\hat{i}$, si para $x = x_0$, $y = a$ (permanece constante) ¿Cuál es su cantidad de movimiento angular con respecto al origen en función de *x*?

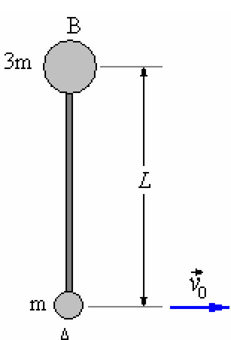
Respuesta. $\vec{L} = mv_0 a\hat{k}$

39. Un obús de masa m se dispara de un cañón en el origen, El obús se mueve en el plano y con una velocidad inicial de magnitud v_0 y un ángulo θ con el eje *x*.
a) ¿Cuál es el torque sobre el obús, con respecto al origen en función del tiempo?
b) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del, obús con respecto al origen en función del tiempo?
c) Comprobar que $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

Respuesta. a) $\vec{\tau} = -v_0 mgt\cos\theta\,\hat{i}$

b) $\vec{L} = -\dfrac{1}{2}v_0 mgt^2\cos\theta\,\hat{i}$

40. Dos esferas pequeñas A y B están unidas por una varilla rígida de longitud ℓ y masa despreciable. Las dos masas reposan sobre una superficie lisa horizontal cuando se comunica repentinamente a A la velocidad $\vec{v}_0 = v_0\hat{i}$. Hallar: a) La cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular del sistema respecto al centro de masa.
b) Las velocidades de A y B cuando la varilla ha girado 90º.
c) Las velocidades de A y B cuando la varilla ha girado 180º.

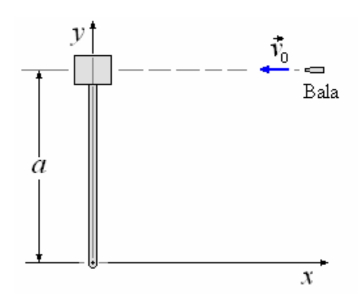


Respuesta: a) $\vec{p} = mv_0\hat{i}$, $\vec{L} = \dfrac{3}{4}m\ell v_0\hat{k}$

b) $\vec{v}_A = \dfrac{1}{4}v_0\hat{i} + \dfrac{3}{4}v_0\hat{j}$, $\vec{v}_B = \dfrac{1}{4}v_0\hat{i} - \dfrac{1}{4}v_0\hat{j}$

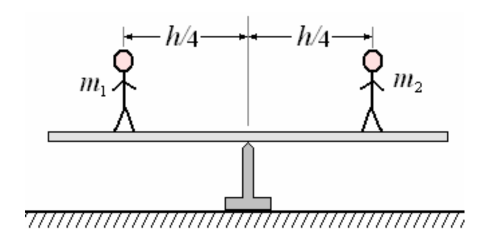
c) $\vec{v}_A = -\dfrac{1}{2}v_0\hat{i}$, $\vec{v}_B = \dfrac{1}{2}v_0\hat{i}$

4l. Se tiene una varilla rígida de masa despreciable sujeta a un eje sin rozamiento de tal manera que la varilla pueda rotar libremente. Al otro extremo de la varilla hay un bloque de masa *M*. Si se dispara una bala de masa *m* con una velocidad v_0 tal como se muestra en la figura. ¿Si la bala se incrusta en el bloque, cuál será la velocidad angular del bloque alrededor del eje7



Respuesta. $\omega = \dfrac{mv_0}{(m+M)a}$

42. Una barra de longitud b está pivotada en su centro de tal manera que puede rotar en el plano horizontal. Dos niños están sobre la barra en las posiciones mostradas en la figura 7.59. a cual está rotando con una velocidad angular en el sentido antihorario visto desde arriba. Si el niño de masa m_1 empieza a moverse hacia el centro tal que su distancia a el es $b/4 - at^2$, ¿Cuál debe ser el movimiento del niño de masa m_2 para que la velocidad angular de la barra permanezca constante? (La masa de la barra es despreciable),



Respuesta. Debe cambiar su distancia al centro de acuerdo a la ecuación $\sqrt{\frac{b^2}{16}+\frac{m_1}{m_2}at^2\left(\frac{b}{2}-at^2\right)}$

43. Un taco golpea a una bola de billar ejerciendo una fuerza promedio de 50 N durante un tiempo de 0,01 s, si la bola tiene una masa de 0,2 kg, ¿qué velocidad adquirió la bola luego del impacto?.

Respuesta. v_f = 2,5 m/s

44. Una fuerza actúa sobre un objeto de 10 kg aumentando uniformemente desde 0 hasta 50 N en 4 s. ¿Cuál es la velocidad final del objeto si partió del reposo?.

Respuesta. v_f = 10 m/s

45. Se rocía una pared con agua empleando una manguera, la velocidad del chorro de agua es de 5 m/s, su caudal es de 300 cm^3/s, si la densidad del agua es de 1 g/cm^3 y se supone que el agua no rebota hacia atrás, ¿cuál es la fuerza promedio que el chorro de agua ejerce sobre la pared?.

Respuesta. F = 1,5N

46. Se dispara horizontalmente una bala de 0,0045 kg de masa sobre un bloque de 1,8 kg de masa que está en reposo sobre una superficie horizontal, luego del impacto el bloque se desplaza 1,8 m y la bala se detiene en él. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la superficie es de 0,2, ¿cuál era la velocidad inicial de la bala?.

Respuesta. v_{1i} = 1073 m/s

47. Se dispara una bala de 0,01 kg de masa contra un péndulo balístico de 2 kg de masa, la bala se incrusta en el péndulo y éste se eleva 0,12 m medidos verticalmente, ¿cuál era la velocidad inicial de la bala?.

Respuesta. v_{1i} = 309,8 m/s

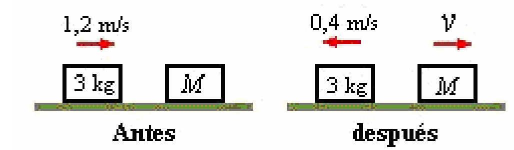
48. Una partícula A de masa m_A se encuentra sujeta por medio de un resorte comprimido a la partícula B de masa 2m_A, si la energía almacenada en el resorte es de 60 J ¿qué energía cinética adquirirá cada partícula luego de liberarlas?.

Respuesta. $E_{c\,Bf}$ = 20 J

49. Un cuerpo de masa m_1 = 2 kg se desliza sobre una mesa horizontal sin fricción con una velocidad inicial v_{1i} = 10 m/s, frente a él moviéndose en la misma dirección y sentido se encuentre el cuerpo de masa m_2 = 5 kg cuya velocidad inicial es v_{2i} = 3 m/s, éste tiene adosado un resorte en su parte posterior, cuya constante elástica es k = 1120 N/m, ¿cuál será la máxima compresión del resorte cuando los cuerpos choquen?.

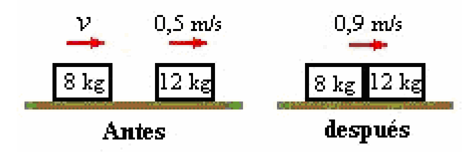
Respuesta. Δx = 0,28 m

50. Un bloque de 3,0 kilogramos, moviéndose sobre una superficie sin fricción con una velocidad de 1,2 m/s, tiene una colisión perfectamente elástica con un bloque de la masa M en el reposo. Después de la colisión el bloque de 3,0 kilogramos retrocede con una velocidad de 0,4 m/s.



a) La masa M es:
b) La velocidad del bloque de masa M después de la colisión es:
c) Los bloques están en el contacto para 0,20 s. La fuerza media en el bloque de 3,0 kilogramos, mientras los dos bloques están en contacto, es:
Respuesta. a) 6,0 kg, b) 0,8 m/ s, c) 24 N

51. El bloque de 8 kilogramos tiene una velocidad v y es detrás del bloque de 12 kilogramos que tiene una velocidad de 0,5 m/s. la superficie es de fricción despreciable. Los bloques chocan y se juntan. Después de la colisión, los bloques tienen una velocidad común de 0,9 m/s.

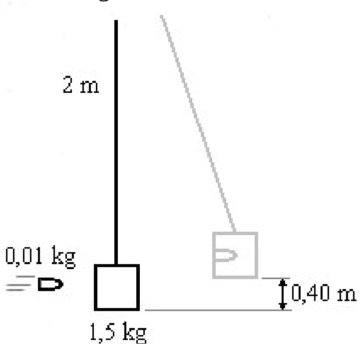


a) La pérdida de energía cinética de los bloques debido a la colisión está la más cercana a:

b) El impulso sobre el bloque de12 kg debido a la colisión es
Respuesta. a) 2,4 J, b) 4,8 N s

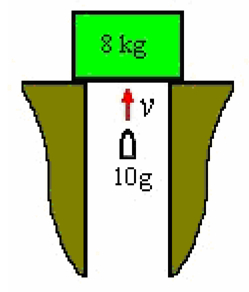
52. Una bola de acero de 72 g se lanza desde el reposo y cae verticalmente sobre una placa de acero. La bola golpes la placa y está en contacto con ella por 0,5 ms, la bola elásticamente, y vuelve a su altura original. El intervalo de tiempo para el viaje es 0,30 s.
a) La fuerza promedio ejercida sobre la bola durante el contacto es
b) Asumiendo que la placa no se deforma durante el contacto. La energía elástica máxima almacenada por la bola es:
Respuesta. a) 420 N, b) 0,08 J

53. Una bala de la masa 0,01 kilogramos que se mueve horizontalmente golpea un bloque de madera de masa 1,5 kilogramos suspendida como péndulo. ¿La bala se aloja en la madera, y juntos giran hacia arriba una distancia de 0,40 m. cuál era la velocidad de la bala momentos antes del impacto con el bloque de madera? La longitud de la cuerda es 2 metros.



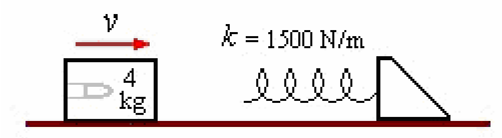
Respuesta. 66,7m/s

54. Una bala de 10 g se dispara verticalmente en un bloque de 8 kilogramos. El bloque se levanta 3 mm. La bala penetra en el bloque en un intervalo de tiempo de 0,001 s. asume que la fuerza en la bala es constante durante la penetración.



a) La energía cinética inicial de la bala es:
b) El impulse en el bloque debido a la captura de la bala es:
c) La penetración de la bala en el bloque, es:
Respuesta. a) 190 J, b) 2,0 Ns, c)) 10 cm.

55. Una bala de 8 g se tira en un bloque de 4,0 kilogramos, en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. La bala se aloja en el bloque. El bloque se mueve hacia el resorte y lo comprime 3,0 centímetros. La constante de la fuerza del resorte es 1500 N/m.

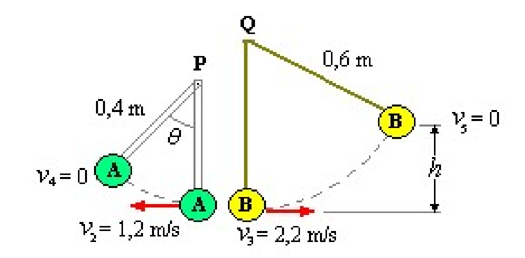


a) La velocidad de la bala es:
b)) El impulso del bloque (con la bala), debido al resorte, durante el tiempo en el cual el bloque y el resorte están en contacto está es:
Respuesta. a) 290 m/s, b) 4,7 N.s

56. En una demostración una bola de acero pequeña de la masa *m* se sostiene sobre una superbola de masa *M* (superbola es una bola de goma del coeficiente de restitución muy alto). La combinación junta se suelta del reposo. Cuando el superbola golpea el piso rebota casi elásticamente, golpeando a bola de acero que todavía está moviéndose hacia abajo. Esta colisión es también bastante elástica, y consecuentemente bola de acero se golpea y es lanzada derecho hasta una altura *H*. Si *h* es la altura de la cual los objetos fueron soltados, y $M >> m$, entonces bola de acero pequeña se levantará a una altura:
Respuesta. 9 *h*

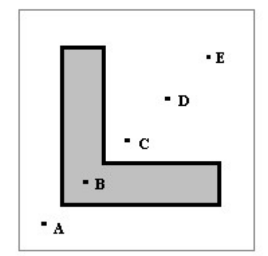
57. Una muchacha de masa 50 kilogramos lanza una bola de la masa 0,1 kilogramos contra una pared. La bola golpea la pared horizontalmente con una velocidad de 20 m/s, y rebota con esta misma velocidad. ¿La bola está en contacto con la pared 0,05 s, cuál es la fuerza media ejercida sobre la bola por la pared?
Respuesta. 80N

58. La bola A, de la masa 3,0 kilogramos, se une a una barra ligera de 0,4 m, que gira libremente en P. La bola B está suspendida de Q por una cuerda de 0,6 m y está en reposo. La bola A se levanta a cierto nivel y se suelta. La bola A desciende, y tiene una velocidad v_1 = 3,6 m/s en el fondo, antes de chocar a la bola B. Las velocidades de las bolas A y B después del choque son: v_2 = - 1,2m/s y v_3 =2,2 m/s...



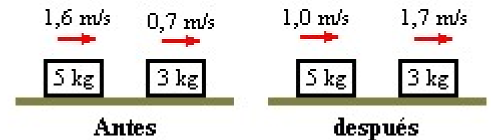
a) La masa de la bola B es:
b) La magnitud del impulso sobre la bola A es:
c) La bola A rebota y gira un ángulo θ, donde la velocidad v_4 es cero. El valor de θ es:
d) La bola B se eleva hasta la altura *h*, donde la velocidad v_5 es cero. El valor de *h* es:
Respuesta. a) 6,6 kg, b) 14.4 N. s, c) 35º d) 0,25 m

59. Una pieza en forma de L se corta de una hoja uniforme de metal. ¿Cuál de los puntos indicados es el más cercano al centro de la masa del objeto?



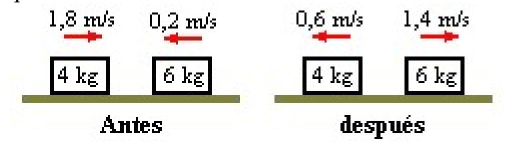
Respuesta. C

60. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?

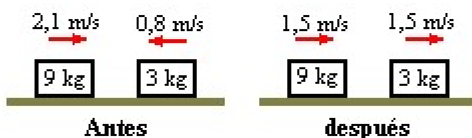


Respuesta. Parcialmente inelástico.

61. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?



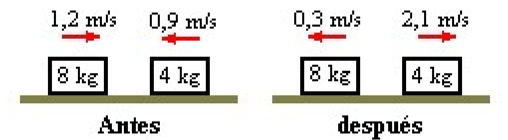
Respuesta. Perfectamente elástico.



62. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?

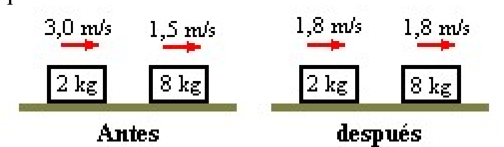
Respuesta. no posible porque la cantidad de movimiento no se conserva.

63. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?



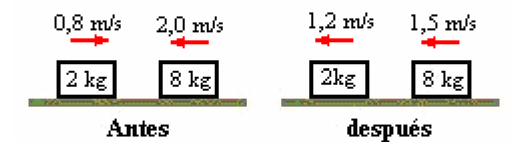
Respuesta. Caracterizado por un incremento en energía cinética.

64. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?



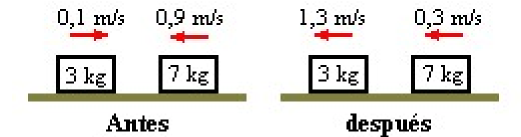
Respuesta. Completamente inelástico

65. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?



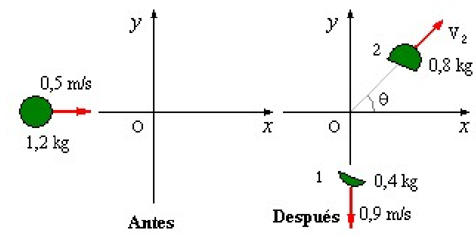
Respuesta. Parcialmente inelástico

66. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?



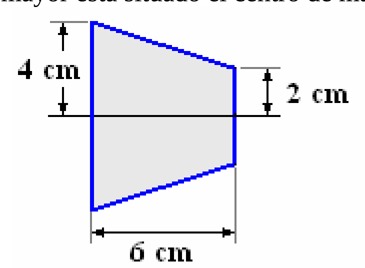
Respuesta. Parcialmente inelástico

67. Un resorte activa una bomba de juguete de 1,2 kg sobre una superficie lisa a lo largo del eje x con una velocidad de 0,50 m/s. en el origen O, la bomba estalla en dos fragmentos. El fragmento 1 tiene una masa de 0,4 kilogramos y una velocidad de 0,9 m/s a lo largo del eje y negativo.



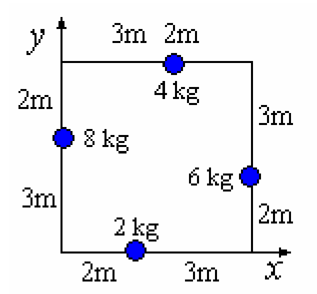
a) La componente en x de la cantidad de movimiento del fragmento 2 debido a la explosión es:
b) El ángulo θ, formado por el vector velocidad del fragmento 2 y el eje x es:
c) La energía liberada por la explosión es:
Respuesta. a) 0., N. s, b) 31º, c) 0,32 J

68. Un cono trunco homogéneo de metal tiene una base circular mayor de radio 4 cm y la menor de radio 2 cm. Su altura es 6 cm. ¿A qué distancia de su diámetro mayor está situado el centro de masa?



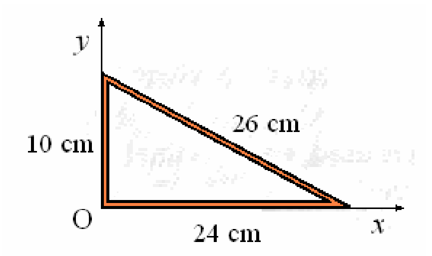
Respuesta. 2,36 cm

69. Cuatro masas puntuales se colocan como se muestra en la figura: ¿Cuáles son las coordenadas del centro de masa?



Respuesta. (23, 2,8)

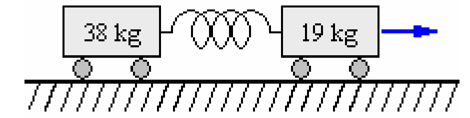
70. Un alambre uniforme de longitud 60 cm y masa 60 g , está doblado en un triángulo rectángulo. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de masa?



Respuesta. (10, 3)

71. Una partícula de la masa 5,01 x 10^{-27} kilogramos, moviéndose a 1,88 x 10^{5} m/s, choca con una partícula idéntica que inicialmente está en el reposo. Después de la interacción, las partículas (que no pueden ser distinguidas) se mueven con los ángulos 55,4º y 34,6º, ambos son medidos con respecto a la dirección original del movimiento. ¿Qué velocidades finales tienen las partículas?
Respuesta. 1,55 x 10^{5} m/s a 346º,
1,07 x 10^{5} m/s a 55,4º

72. Un carro de 19 kg está conectado por medio de un resorte comprimido con un carro 38 kg. Los dos carros se están moviendo a la derecha a una velocidad de 25 m/s cuando el resorte se desenrolla y propulsa repentinamente el carro de 19 kg hacia adelante con una velocidad de 27 m/s. encontrar la velocidad del segundo carro con respecto al centro de la masa del sistema.



Respuesta. 1 m/s
7
3. Una fuerza de 5,3 N es necesaria para sujetar a un paraguas en un viento fuerte. Si las moléculas del aire tienen una masa de 4,7 x 10^{-26} kilogramos, y cada una golpea al paraguas (sin rebotar) con una velocidad de 2,0 m/s en la misma dirección, ¿cuántos átomos golpean al paraguas cada segundo? Asuma que el viento sopla horizontalmente para no tomar en cuenta la gravedad.
Respuesta. 5,6 x 10^{25} por Segundo

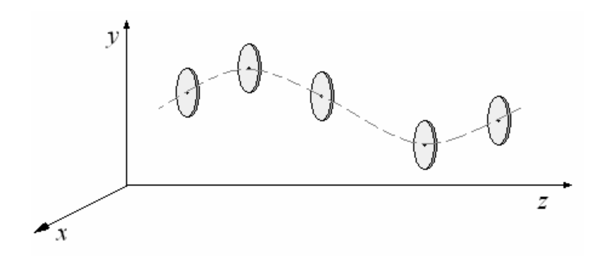
74. Un cohete debe ser lanzado al espacio donde no hay campo gravitacional. el 81% de la masa inicial del cohete es combustible y este combustible se expulsa con una velocidad relativa de 2300 m/s. si se asume que todo el combustible será utilizado, encuentra la velocidad final de la última porción de combustible expulsado relativo a un observador estacionario.
Respuesta. 1500 m/ s

CAPÍTULO 7. Cuerpo rígido

INTRODUCCION
En el capitulo anterior estudiamos el movimiento de un sistema de partículas. Un caso especial importante de estos sistemas es aquel en que la distancia entre dos partículas cualesquiera permanece constante en el tiempo, esto es un CUERPO RIGIDO.
A pesar que no existen cuerpos que sean estrictamente rígidos, todos los cuerpos pueden ser deformados, sin embargo el modelo del cuerpo rígido es útil en muchos casos en que la deformación es despreciable.
La descripción cinemática y dinámica de un cuerpo extenso aunque este sea rígido en un movimiento en tres dimensiones matemáticamente es muy complejo y es tratado en libros avanzados de dinámica. Es complejo porque un cuerpo tiene seis grados de libertad; su movimiento involucra traslación a lo largo de tres ejes perpendiculares y rotación alrededor de cada uno de estos ejes. No llegaremos a hacer un tratamiento general directo, pero si desarrollaremos el movimiento del cuerpo rígido en dos dimensiones.

MOVIMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO
En esta parte expondremos algunos tipos de movimiento de los cuerpos rígidos.

TRASLACION.
Por traslación entendemos al movimiento en el que lodos los puntos del cuerpo se mueven en la misma dirección, con la misma velocidad y la misma aceleración en cada instante**.**



Por la definición de centro de masa, tenemos:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

Donde M es la masa total del cuerpo rígido y

$$M \vec{r}_{CM} = \sum m_i \vec{r}_i$$

Diferenciando dos veces

$$M \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_{CM} = \sum m_i \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i$$

$$M \vec{a}_{CM} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i$$

La suma de las fuerzas que actúan sobre las n partículas determinan la aceleración del centro de masa.

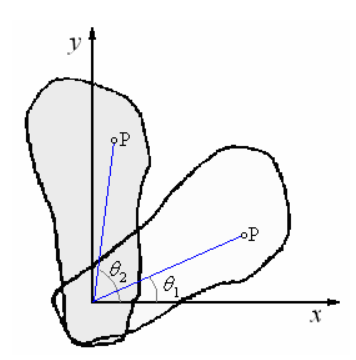
$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum \vec{F}_i}{M}$$

Tal como se mostró para un sistema de partículas, las fuerzas internas se anulan de pares, de forma que solamente importarán las fuerzas externas tal que

$$M \vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_{ext}$$

"El movimiento de traslación del cuerpo rígido es como si toda su masa estuviera concentrada en el centro de masa y las fuerzas externas actuaran sobre él".
Todo el estudio que hemos lecho anteriormente para la partícula corresponde a la traslación de un cuerpo rígido. No importa ni la forma, ni el tamaño.

ROTACIÓN.
Es el movimiento en que uno de los puntos se considera fijo.
Sí se considera fijo un punto, el único movimiento posible es aquel en el que cada uno de los otros puntos se mueve en la superficie de una esfera cuyo radio es la distancia del punto móvil al punto fijo.
Si se consideran dos puntos fijos, el único movimiento posible es aquel en que todos los puntos con excepción de aquellos que se encuentran sobre la línea que une los dos puntos fijos, conocida como EJE, se mueven en circunferencias alrededor de éste.



Cualquier desplazamiento de un cuerpo rígido puede ser considerado como una combinación de traslación y rotación.



En los capítulos anteriores ya hemos profundizado bastante sobre movimiento de traslación

estudiaremos aquí el movimiento de rotación alrededor de un eje y el movimiento de rotación traslación.

CANT1DAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UN CUERPO RÍGIDO

La cantidad de movimiento angular de una partícula respecto a un punto es

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

En coordenadas polares:

$$\vec{r} = r\hat{r}\,,\ \vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\omega\hat{t}$$

$$\vec{L} = r\hat{r} \times m\left(\frac{dr}{dt}\hat{r} + r\omega\hat{t}\right)$$

$$\vec{L} = mr^2\hat{r}\omega \times \hat{t}$$

$\hat{r} \times \hat{t}$ tiene la dirección y sentido de $\vec{\omega}$

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$$

Si consideramos al cuerpo rígido como *n* partículas que giran alrededor de un eje, la cantidad de movimiento angular de éste será la suma de la cantidad de movimiento angular de cada una de las partículas.

$$\vec{L}_{total} = m_1r_1^2\vec{\omega} + m_2r_2^2\vec{\omega} + ... + m_nr_n^2\vec{\omega}$$

$$= \left(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + ... + m_nr_n^2\right)\vec{\omega}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2\right)\vec{\omega}$$

La cantidad entre paréntesis es el MOMENTO DE INERCIA DEL CUERPO RÍGIDO alrededor de un eje.

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2$$

Es importante darse cuenta que el momento de inercia depende de la distribución de la masa del cuerpo.

En el caso de un cuerpo rígido continuo, los m_i tienden a dm y

$\sum$ se transforma en $\int_M$, de aquí:

$$I = \int_M r^2 dm$$

Como $m = \rho V$, donde ρ es la densidad y V el volumen del cuerpo:

$$dm = \rho dV$$

Tenemos: $I = \int_V \rho r^2 dV$

Para muchos cuerpos de forma geométrica simple ésta integral puede evaluarse fácilmente.

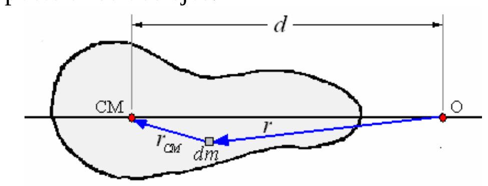
Dos teoremas que simplifican los cálculos del momento de inercia son:

I) El teorema de Steiner o de los ejes paralelos.

"El momento de inercia del cuerpo respecto a un eje es igual al momento de inercia del cuerpo respecto a un eje paralelo al anterior y que pasa por el centro de masa es el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia entre los ejes".

$$I_0 = I_{CM} + Md^2$$

Demostración. La figura siguiente representa la sección de un cuerpo en el plano del papel, CM es el eje normal al plano del papel a través del centro de masa y O es un eje paralelo. Escogiendo un elemento diferencial de masa dm , escribamos la expresión para los momentos de inercia con respecto a los dos ejes.



$$I_{CM} = \int_M r_{CM}^2 dm \quad I_0 = \int_M r^2 dm$$

usando la ley de los cosenos, obtenemos:

$$r^2 = r_{CM}^2 + d^2 - 2r_{CM}d\cos\theta$$

reemplazando

$$I_0 = \int_M \left(r_{CM}^2 + d^2 - 2r_{CM}d\cos\theta\right)dm$$

$$I_0 = \int_M r_{CM}^2 dm + d^2\int_M dm - 2d\int_M r_{CM}\cos\theta dm$$

El primer término

$$\int_M r_{CM}^2 dm = I_{CM}$$

El segundo término

$$d^2\int_M dm = Md^2$$

El tercer término es cero porque es la suma en todo el cuerpo d los productos del elemento de masa y sus distancias al eje a través del centro de masa, de aquí:

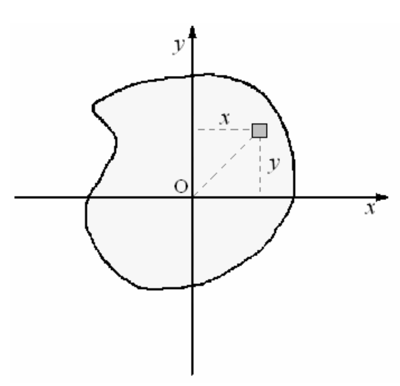
$$I_0 = I_{CM} + Md^2$$

II. El teorema de la figura plana.

El momento de inercia de una figura plana con respecto a un eje perpendicular a la misma es igual a la suma de los momentos de inercia de la figura plana con respecto a dos ejes rectangulares en el plano de la figura los cuales se intersecan con el eje dado

Demostración:

En la figura siguiente el eje *z* pasa por O perpendicular al piano *y*. Elegimos un elemento diferencial de masa *dm* y escribimos los momentos de inercia de la figura para cada uno de los tres ejes.



$I_x = \int_M y^2 dm$, $I_y = \int_M x^2 dm$, $I_z = \int_M r^2 dm$

con $r^2 = x^2 + y^2$

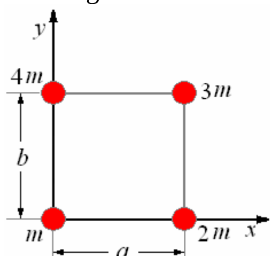
$$\int_M r^2 dm = \int_M \left(x^2 + y^2\right) dm$$

$$= \int_M x^2 dm + \int_M y^2 dm$$

$$I_z = I_x + I_y$$

Ejemplo 1. A continuación evaluaremos los momentos de inercia algunos cuerpos simples.

a) Hallar el momento de inercia del sistema mostrado en la figura, las masas son puntuales unidas por varillas rígidas de masa despreciable.



Solución.

Momento de inercia respecto al eje *x*.

$$I_x = \sum y_i^2 m_i$$

$$= m(0)^2 + 2m(0)^2 + 3m(b)^2 + 4m(b)^2$$

$$= 7mb^2$$

Momento de inercia respecto al eje *y*.

$$I_y = \sum x_i^2 m_i$$

$$= m(0)^2 + 2m(a)^2 + 3m(a)^2 + 4m(0)^2$$

$$= 5ma^2$$

Momento de inercia respecto al eje *z*.

$$I_z = \sum r_i^2 m_i$$

$$= m(0)^2 + 2m(a)^2 + 3m\left(a^2 + b^2\right) + 4m(b)^2$$

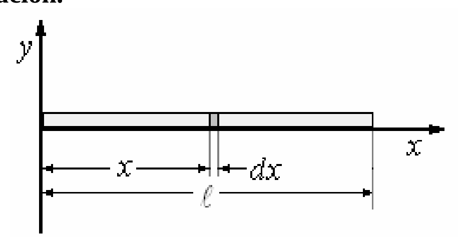
$$= 7mb^2 + 5ma^2$$

Aquí comprobamos

$$I_z = I_x + I_y$$

b) Momento de inercia de una varilla delgada rígida de longitud ℓ y masa *m*, con respecto a un extremo y con respecto al centro de masa.

Solución.



Tomemos un elemento diferencial *dx*, cuya masa es:

$$dm = \frac{M}{\ell} dx$$

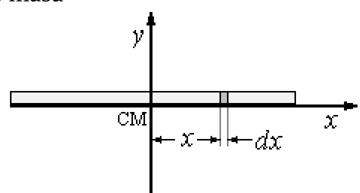
El momento de Inercia de la varilla es:

$$I_O = \int_M x^2 dm = \int_0^\ell x^2 \frac{M}{\ell} dx$$

$$= \frac{M}{\ell} \int_0^\ell x^2 dx = \frac{M}{3\ell}\left[x^3\right]_0^\ell$$

$$= \frac{1}{3} M\ell^3$$

El momento de inercia de la varilla con respecto al centro de masa



$$I_{CM} = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} x^2 \frac{M}{\ell} dx = \frac{M}{3\ell}\left[x^3\right]_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}}$$

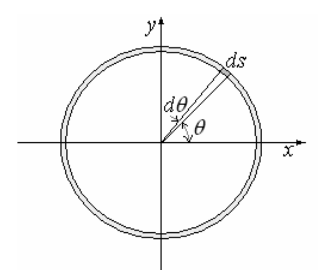
$$= \frac{1}{12} M\ell^3$$

Aquí comprobamos:

$$I_O = I_{CM} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

c) Momento de inercia un anillo de masa *M* y radio *R*, en el plano *xy*, Con respecto a los ejes *x, y, z.*

Solución.



La masa del elemento diferencial $ds = Rd\theta$ es:

$$dm = \frac{M}{2\pi R} ds = \frac{M}{2\pi} d\theta$$

El momento de inercia del anillo con respecto al eje z es:

$$I_z = \int_M R^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \frac{M}{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{MR^2}{2\pi} [\theta]_0^{2\pi} = mR^2$$

Por el teorema de la figura plana

$$I_z = I_x + I_y$$

Por simetría

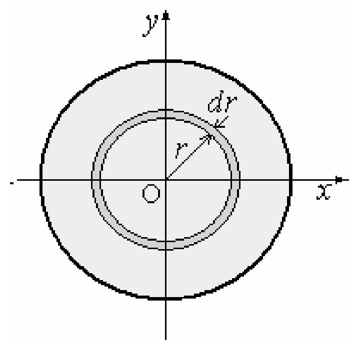
$$I_x = I_y$$

Luego

$$I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{1}{2} MR^2$$

d) El momento de inercia de un disco de radio R y masa M con respecto al eje perpendicular que pasa por su centro.

Solución.



Consideremos como elemento diferencial al anillo de radio r y ancho dr, su masa es:

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2M}{R^2} r dr$$

El momento de inercia de este anillo con respecto al eje perpendicular que pasa por O es

$$dI_O = r^2 dm = r^2 \frac{2M}{R^2} r dr$$

$$= \frac{2M}{R^2} r^3 dr$$

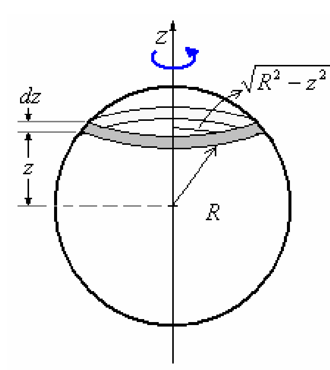
El momento de inercia del disco es:

$$I_O = \int dI_O = \int_0^R \frac{2M}{R^2} r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$= \frac{1}{2} MR^2$$

e) El momento de inercia de una esfera con respecto a un eje que pasa por su centro.

Solución.



Consideremos la esfera como una serie de discos. Tomemos un disco diferencial como se muestra en la figura, su radio es $r = \sqrt{R^2 - z^2}$, su espesor dz.

La masa del disco es:

$$dm = \frac{M}{V} \pi r^2 dz = \frac{M}{V} \pi (R^2 - z^2) dz$$

M es la masa de la esfera y $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ el volumen de la esfera.

El momento de inercia del disco con respecto al eje z es:

$$dI_z = \frac{1}{2} dm r^2 = \frac{1}{2} \frac{M}{V} \pi (R^2 - z^2)^2 dz$$

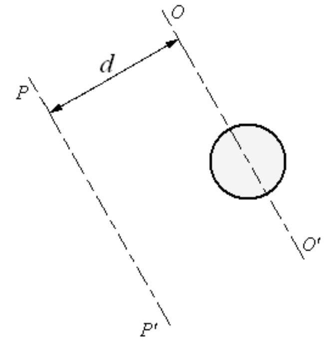
El momento de inercia de la esfera lo encontramos integrando esta expresión desde $z = -R$ a $z = R$.

$$I_z = \int dI_z = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2} \frac{M}{V} \pi (R^2 - z^2)^2 dz$$

$$= \frac{M}{V} \pi \int_0^R (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{8}{15} \frac{\pi M R^5}{V}$$

$$= \frac{2}{5} MR^2$$

Para encontrar el momento de inercia con respecto a un eje arbitrario como se muestra en la figura siguiente aplicamos el teorema de Steiner.



$$I_P = I_O + Md^2 = \frac{2}{5} MR^2 + Md^2$$

$$I_P = Md^2 \left[1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{d}\right)^2\right]$$

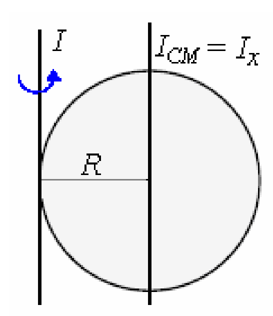
En el caso en que $R << d$ podemos considera como

si fuera una masa puntual y el momento de inercia se reduce a:

$$I_O = Md^2$$

Ejemplo 2. Hallar el momento de inercia de un disco de masa *M* y radio *R* que gira alrededor de un eje paralelo a un diámetro y que pasa por el borde del disco.

Solución.



Por el teorema de las figuras planas
$I_z = I_x + I_y$;

Además por simetría
$I_x = I_y$,

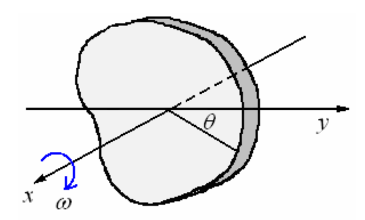
Por tanto
$I_x = I_z/2 = ¼ MR^2$

Aplicando el teorema de Steiner

$I = ¼ MR^2 + MR^2$
$= 5/4 MR^2$

SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA ROTACION

En esta sección vamos a analizar el movimiento de un cuerpo rígido que gira en torno a un eje fijo en el espacio.



El cuerpo gira en torno al eje *x*. Si $\theta = \theta(t)$ es el desplazamiento angular del punto del cuerpo desde la línea referencial, la velocidad angular del cuerpo es:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Como cada punto del cuerpo gira a la misma velocidad angular ω, el desplazamiento $\theta(t)$ de cualquier punto describe el desplazamiento del cuerpo como un todo.

Para el sistema de partículas vimos que la suma de los torques producidos por las fuerzas externas que actúan sobre el sistema es igual al cambio de la cantidad de movimiento angular.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Esto es válido también para el cuerpo rígido, donde L es la cantidad de movimiento angular can respecto al eje *x* de la figura anterior.

Como $\vec{L} = I\vec{\omega} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I\vec{\omega}\right)$

Siendo *I* el momento de inercia del cuerpo en torno al eje dado, es constante en el tiempo y

$$\vec{\tau} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

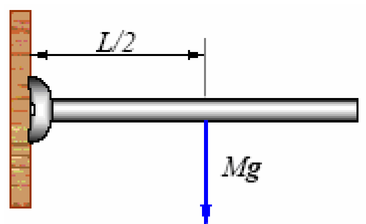
Como $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha}$, aceleración angular del cuerpo

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

Esta expresión tiene similitud a la ley de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Ejemplo 3. Una barra uniforme de longitud *L* y masa *M*, que gira libremente alrededor de una bisagra sin fricción, se suelta desde el reposo en su posición horizontal, como se muestra en la figura. Calcular la aceleración angular de la barra y su aceleración lineal inicial de su extremo.



Solución.

Como el torque de la fuerza en la bisagra es cero, se puede calcular el torque en torno a la bisagra producido por la otra fuerza externa que actúa sobre la barra, que es su peso, suponiendo que la barra es homogénea y que el peso actúa en su centro geométrico. Entonces:

$$\tau = rMg = \frac{1}{2}LMg$$

Como $\tau = I\alpha$, y el momento de inercia de la barra es $I = \frac{1}{3}ML^2$.

Se tiene: $I\alpha = \frac{1}{2}LMg$

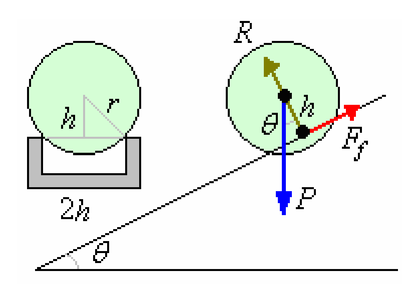
$$\Rightarrow \alpha = \frac{\frac{1}{2}LMg}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}$$

Para calcular la aceleración lineal del extremo de la barra, usamos la ecuación $a_t = \alpha L$.

Reemplazando α:

$$a_t = L\alpha = \frac{3}{2}g$$

Ejemplo 4. Una esfera rueda sobre una barra, con sección en forma de U, inclinada. Determinar la aceleración.



Solución.

Las fuerzas que actúan sobre la esfera son el peso, *P*, la reacción normal del plano, *R*, y la fuerza de rozamiento F_f.

Como la reacción *R* y el rozamiento F_f están aplicados en el eje instantáneo de rotación no realizan ningún torque, sólo el peso:

$\tau = hmg\,\text{sen}\,\theta$, siendo $h = \left(r^2 - b^2\right)^{1/2}$

El momento de inercia de la esfera con relación al eje instantáneo de rotación es

$$I = \frac{2}{5}mr^2 + mh^2$$

Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de rotación:

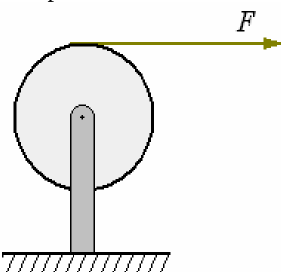
$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{hmg\text{sen}\theta}{\left(2mr^2/5 + mh^2\right)} = \frac{hg\text{sen}\theta}{\left(2r^2/5 + h^2\right)}$$

la aceleración lineal será: $a = \alpha\, h$

$$a = \frac{h^2 g\text{sen}\theta}{\left(2r^2/5 + h^2\right)} = \frac{g\text{sen}\theta}{\left(2r^2/5h^2 + 1\right)}$$

$$= \frac{5\left(r^2 - b^2\right)gh^2\text{sen}\theta}{\left(7r^2 - 5b^2\right)}$$

Ejemplo 5. Se tiene un disco de masa *M* y radio *R*, que pueda girar libremente alrededor de un eje que pasa por su centro. Se enrolla una cuerda alrededor del disco, se tira la cuerda con una fuerza *F*. Si el disco está inicialmente en reposos ¿Cuál es su velocidad al tiempo *t*?



Solución.
El momento de inercia del disco con respecto al eje es:

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

La dirección de la cuerda siempre es tangente al disco por lo que el torque aplicado es:

$\tau = FR$

Como $\tau = I\alpha$

Tenemos $\alpha = \frac{\tau}{I}$

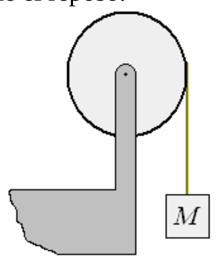
Reemplazando

$$\alpha = \frac{FR}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{2F}{MR}$$

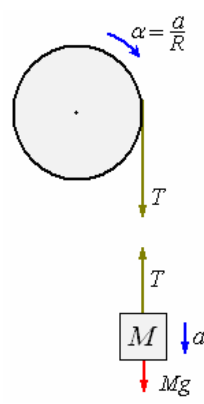
Siendo α constante $\omega = \omega_0 + \alpha t$

Como $\omega_0 = 0 \Rightarrow \omega = \alpha t = \frac{2F}{MR}t$

Ejemplo 6. Se sujeta una masa *M* a una cuerda ligera enrollada alrededor de una rueda de momento de inercia *I* y radio *R*.
Hallar La tensión de la cuerda, la aceleración y su velocidad después de haber descendido una distancia *h* desde el reposo.



Solución.
La figura siguiente muestra los diagramas de cuerpo libre.



Aplicando la segunda ley de Newton a la masa M

$Mg - T = Ma$ (1)

Aplicando la segunda ley de Newton para rotación al disco

$TR = I\alpha$,

como $a = R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R}$

$TR = I\frac{a}{R}$ o $TR^2 = Ia$ (2)

Resolviendo (1) y (2) obtenemos

$$a = \frac{M}{M + I/R^2}g,$$

$$T = \frac{I/R^2}{M + I/R^2}Mg$$

Siendo un movimiento con aceleración constante

$v^2 = v_0^2 + 2as$

Conocemos: a, $v_0 = 0$, $s = h$:

$$v^2 = \frac{2Mg}{M + I/R^2}h$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Mg}{M + I/R^2}h}$$

Ejemplo 7. Un anillo de 5 cm de radio, grosor despreciable y densidad 1,6 g/cm, se pone en rotación alrededor de un diámetro cuando se le comunica un momento angular de 7900 g cm^2/s.

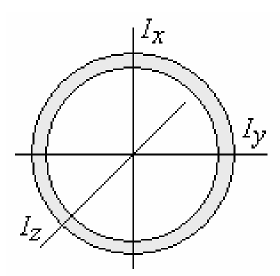
a) Hallar la expresión analítica y el valor numérico del momento de inercia respecto del eje de giro.

b) ¿Con qué velocidad angular empieza a girar?

c) Si el rozamiento con el aire y los pivotes origina un par de fuerzas cuyo torque es de 50 dina cm, ¿cuál será la ecuación del movimiento que efectúa el anillo?, ¿cuánto tiempo tarda en pararse?

(Nota 1 N = 10^5 dinas)

Solución.



a) Por el teorema de las figuras planas, tenemos que:

$I_z = I_x + I_y$;

Además por simetría

$I_x = I_y$,

Por tanto

$$I_x = \frac{I_z}{2} = \frac{1}{2}\rho L R^2 = \frac{1}{2}\rho(2\pi R)R^2 = \pi\rho R^3$$

$$= \pi(1{,}6.10^{-1})(0{,}05)^3 = 6{,}28\text{x}10^{-5} \text{ kg m}^2$$

b) Al comunicarle un momento angular

L = 7,9 x10^{-4} kg m^2/s,

$$\omega_0 = \frac{L}{I} = \frac{7{,}9\times10^{-4}}{6{,}28\times10^{-5}}$$

= 12,58 rad/s

c) τ = 50 dina cm = 50x10^{-5} Nx10^{-2} m

= 5x10^{-6} N m

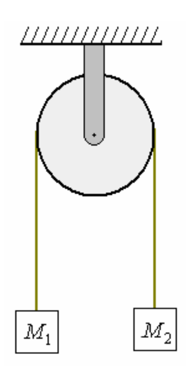
Por lo tanto la ecuación del movimiento en términos angulares será:

$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 12{,}6t - 0{,}0398t^2$, y

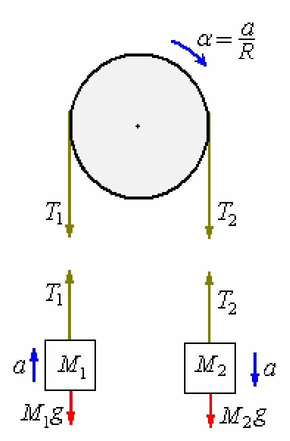
$\omega = 12{,}6 - 0{,}079t$

Siendo ω = 0 para t = 158 s.

Ejemplo 8. Maquina de atwood tomando en cuenta la polea.



La polea es un disco de masa M y radio R. La figura muestra los diagramas de cuerpo libre de cada una de las partes de la máquina de atwood.



Aplicando la segunda ley de Newton a cada una de las partes.

Masa M_1:

$$T_1 - M_1 g = M_1 a \qquad (1)$$

Masa M_2:

$$M_2 g - T_2 = M_2 a \qquad (2)$$

Polea:

$$T_2 R - T_1 R = I\alpha$$

$$= \frac{1}{2} MR^2 \frac{a}{R} = \frac{1}{2} MRa \quad (3)$$

Resolviendo (1), (2) y (3), obtenemos:

$$T_1 = M_1 (g + a),$$

$$T_2 = M_2 (g - a) \text{ y}$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1 + M/2)} g$$

Ejemplo 9. Una polea homogénea de radio R, masa M y momento de inercia I, gira alrededor de su eje, debido a la acción de dos masas m_1 y m_2.

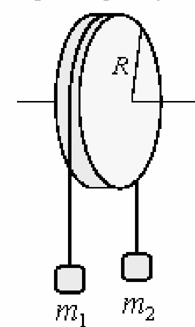
R = 0,3 m, m_1 =15 kg, m_2 = 10 kg, M = 20 kg, I =18 kg m^2.

Calcular:

a) La aceleración angular de la polea.

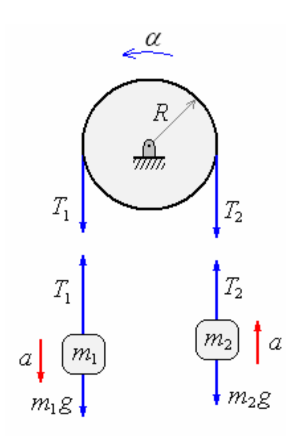
b) Las tensiones de las cuerdas.

c) La tensión del soporte que fija el sistema al techo



Solución.

a) Vamos a suponer que el sistema acelera hacia el lado de la masa mayor M.



Planteando la segunda ley de Newton para cada masa:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a ,$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a$$

Para la polea:

$$\sum \tau = T_1 R - T_2 R = I\alpha = I \frac{a}{R}$$

Como el hilo no desliza,

$$a = \alpha R$$

Por lo tanto tenemos tres ecuaciones:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a ,$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a ,$$

$$T_1 - T_2 = I \frac{a}{R^2}$$

Que sumadas dan lugar a:

$(m_1 - m_2)\, g = a(m_1 + m_2 + I/R^2)$.

Por lo tanto a vale:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} g = \frac{5}{25 + \frac{18}{0{,}3^2}} 9{,}8$$

$$= 0{,}22 \text{ m / s}^2$$

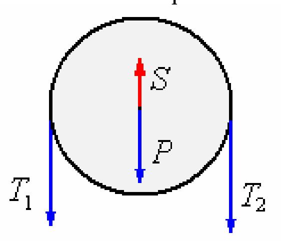
$$\text{y} \quad \alpha = \frac{a}{R} = \frac{0{,}22}{0{,}3} = 0{,}73 \text{ rad / s}^2$$

b) De las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$T_1 = m_1 g - m_1 a = 15(g - a) = 143{,}7 \text{ N}.$$

$$T_2 = m_2 (g + a) = 100{,}2 \text{ N}.$$

c) Considerando todas las fuerzas que actúan sobre la polea, que debe estar en equilibrio:

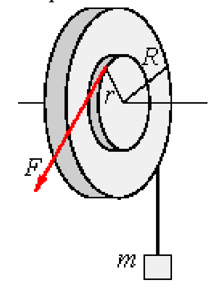


$$\sum \vec{F} = 0$$

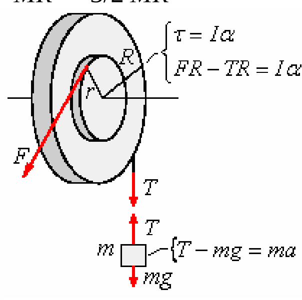
$S = P + T_1 + T_2$ = 20 x 9,8 + 146,67 + 102,22

= 445 N

Ejemplo 10. La figura representa un cilindro macizo y homogéneo de radio R = 20 cm y masa M = 20 kg. A su periferia va arrollado un hilo ideal de cuyo extremo libre cuelga una masa m = 8 kg. Por una hendidura muy fina se le arrolla otro hilo ideal a una distancia del eje horizontal r = 10 cm, a cuyo extremo libre se le aplica una fuerza constante F = 200 N. Calcular:
a) Momento de inercia del cilindro respecto a un eje que coincida con una generatriz.
b) Aceleración con que sube la masa m.
c) Aceleración angular del cilindro.
d) Tensión del hilo que sostiene la masa.



Solución.
a) Aplicando el teorema de Steiner,
$I = ½\, MR^2 + MR^2 = 3/2\, MR^2$



b) Podemos plantear dos ecuaciones:
$T - mg = ma$ y

$$Fr - TR = I\alpha = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{a}{R}\right) = \frac{1}{2}MRa$$

Que conducen a:

$$Fr - mgR = a\left(mR + \frac{1}{2}MR\right).$$

Por lo tanto la aceleración a vale:

$$a = \frac{Fr - mgR}{mR + \frac{1}{2}mR} = \frac{20 - 15{,}68}{1{,}6 + 2}$$

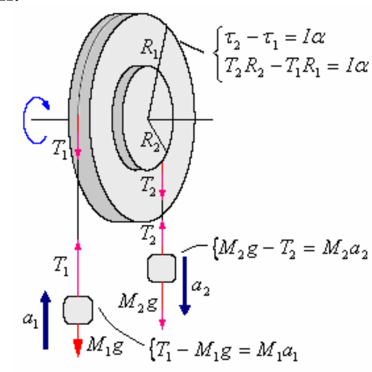
$= 1{,}2$ m / s^2

c) $\alpha = \dfrac{a}{R} = \dfrac{1{,}2}{0{,}2}$

$= 6$ rad/s^2.

d) $T = mg + ma = 8\,(9{,}8 + 1{,}2)$
$= 88$ N.

Ejemplo 11. Dos poleas cuyos radios son 1 m y 0,3 m, están acopladas pegada una a la otra en un plano vertical, formando un bloque que gira alrededor de su eje de rotación común. De la garganta de la polea grande pende una masa de 20 kg y de la garganta de la polea pequeña pende otra masa de 100 kg que tiende a hacer girar a las poleas en sentido contrario al anterior. El momento de inercia del sistema formado por las dos poleas es de 10 kg m^2. Al dejar el sistema en libertad, se pone en movimiento espontáneamente. Se pide:
a) ¿En qué sentido se mueven las poleas?
b) Valor de la aceleración con que se mueve cada una.
c) Aceleración angular de las poleas.
d) Tensión de la cuerda que sostiene la masa de 100 kg cuando el sistema está en movimiento.
Solución.



a) Cuando las poleas están inicialmente en reposo, los pesos coinciden con las tensiones.
Por tanto T_1 = 200 N, y T_2 = 1000 N.
El momento que ejerce T_1 valdrá
$\tau_1 = T_1R_1$ = 200 Nm
El que ejerce T_2 valdrá
$\tau_2 = T_2R_2$ = 300 N m.
Por tanto, al ser el momento de la fuerza T_2 mayor, la polea girará de modo que la masa M_1suba.
b) y c) Planteando la ecuación fundamental de la dinámica a cada masa y a la polea, tendremos:

$T_1 - M_1g = M_1a_1$
$\Rightarrow T_1 - M_1g = M_1\alpha R_1$ (1)
$M_2g - T_2 = M_2a_2$
$\Rightarrow M_2g - T_2 = M_2\alpha R_2$ (2)
$\tau_2 - \tau_1 = I\alpha$
$\Rightarrow T_2R_2 - T_1R_1 = I\alpha$ (3)

De las tres ecuaciones obtenemos α :

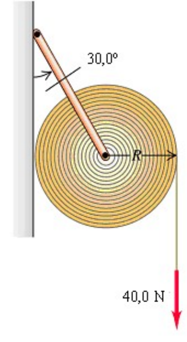
$$\alpha = \frac{M_2gR_2 - M_1gR_1}{M_2R_2^2 + M_1R_1^2 + I}$$

$$= \frac{30 - 20}{20 + 9 + 10}g = 2{,}51 \text{ rad / s}^2.$$

La aceleración de cada masa será:
$a_1 = \alpha R_1$ = 2,51 m/s^2,
$a_2 = \alpha R_2$ = 0,75 m/s^2
d) $T_2 = M_2g - M_2\alpha R_2$ = 904,7 N

Ejemplo 12. Un rollo de 16,0 kg de papel con radio R = 18,0 cm descansa contra la pared

sostenido por un soporte unido a una varilla que pasa por el centro del rollo. La varilla gira sin fricción en el soporte, y el momento de inercia del papel y la varilla alrededor del eje es de 0,260 kg. m^2. El otro extremo del soporte está unido mediante una bisagra sin fricción a la pared de modo que el soporte forma un ángulo de 30,0° con la pared. El peso del soporte es despreciable. El coeficiente de fricción cinética entre el papel y la pared es $\mu_k = 0{,}25$. Se aplica una fuerza vertical constante F = 40,0 N al papel, que se desenrolla.
a) ¿Qué magnitud tiene la fuerza que la varilla ejerce sobre el rollo de papel al desenrollarse?
b) ¿Que aceleración angular tiene el rollo?



Solución.
En el punto de contacto, la pared ejerce una fuerza F_f de la fricción dirigida hacia abajo y una fuerza normal N dirigida a la derecha. Esto es una situación donde es cero la fuerza neta en el rodillo, pero el torque neto no es cero.
La suma de fuerzas verticales

$$F_{var}\cos\theta = F_f + W + F, \quad F_f = \mu_k N,$$

Las fuerzas horizontales

$$F_{var}\text{sen}\theta = N \ .$$

De aquí tenemos:

$$F_{var}\cos\theta = \mu_k N + F + W$$

$$F_{var}\text{sen}\theta = N.$$

a) Eliminando N y resolviendo para F_{var} da

$$F_{var} = \frac{W+F}{\cos\theta - \mu_k \sin\theta}$$

$$= \frac{40{,}0 + (16{,}0)(9{,}80)}{\cos 30° - (0{,}25)\text{sen}30°} = 266 \text{ N}$$

b) Con respecto al centro del rodillo, la barra y la fuerza normal ejercen el torque cero.
La magnitud del torque neto es $(F - F_f)R$, y $F_f = \mu_k N$
Puede calcularse reemplazando el valor encontrado para F_{var} en cualquiera de las relaciones anteriores;

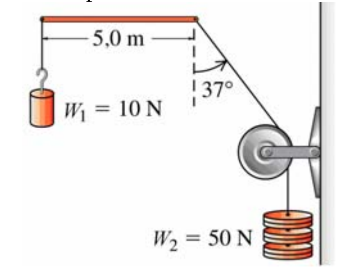
$$F_f = \mu_k F_{var}\text{sen}\theta = 33{,}2 \text{ N}.$$

Luego,

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{(40{,}0 - 31{,}54)(18{,}0\times 10^{-2})}{(0{,}260)}.$$

$$= 4{,}71 \text{ rad/s}^2$$

Ejemplo 13 Se debe aplicar una sola fuerza adicional a la barra de la figura para mantenerla en equilibrio en la posición mostrada. Puede despreciarse el peso de la barra.
a) Calcule las componentes vertical y horizontal de la fuerza requerida.
b) ¿Qué ángulo debe formar ésta fuerza con la barra?
c) ¿Qué magnitud debe tener?
d) ¿Dónde debe aplicarse?



Solución.
a) La tensión en el resorte es $W_2 = 50$ N, y la fuerza horizontal sobre la barra debe equilibrar la componente horizontal de la fuerza que el resorte ejerce sobre la barra, y es igual a $(50 \text{ N})\,\text{sen}\,37° = 30$ N, a la izquierda en la figura.
La fuerza vertical debe ser

$$50\cos 37° + 10 = 50 \text{ N, arriba}$$

b)

$$\arctan\left(\frac{50 \text{ N}}{30 \text{ N}}\right) = 59°$$

c)

$$\sqrt{(30 \text{ N})^2 + (50 \text{ N})^2} = 58 \text{ N}.$$

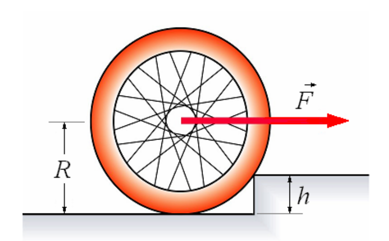
d) Tomando torques alrededor (y midiendo la distancia de) del extremo izquierdo

$$50x = (40)(5{,}0)$$

$$\Rightarrow \ x = 4{,}0 \text{ m}$$

Donde solamente las componentes verticales de las fuerzas ejercen torques.

Ejemplo 14. Imagine que está tratando de subir una rueda de bicicleta de masa m y radio R a una acera de altura h; para ello, aplica una fuerza horizontal F. ¿Qué magnitud mínima de F logra subir la rueda si la fuerza se aplica
a) al centro de la rueda?
b) ¿En la parte superior de la rueda?
c) ¿En cuál caso se requiere menos fuerza?



Solución.
a) Tome los torques respecto a la esquina superior de la acera.

La fuerza $\vec{F}$ actúa a una distancia perpendicular $R-h$ y
el peso actúa en una distancia perpendicular
$\sqrt{R^2-(R-h)^2} = \sqrt{2Rh-h^2}$.
Igualando los torques para encontrar la fuerza necesaria mínima,

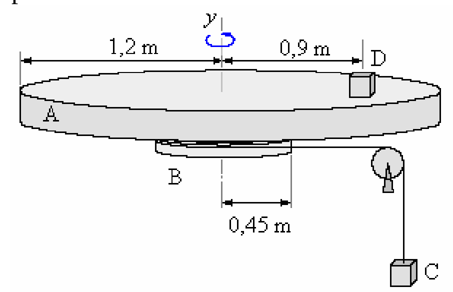
$$F = mg\frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{R-h}.$$

b) El torque debido a la gravedad es el mismo, pero la fuerza $\vec{F}$ actúa a una distancia perpendicular $2R-h$, tal que la fuerza mínima es

$$F = mg\frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{2R-h}.$$

c) Se requiere menos fuerza que cuando la fuerza se aplica en parte alta de la rueda.

Ejemplo 15. Un disco homogéneo A gira alrededor del eje *y* bajo la acción de la masa C unida a una cuerda que pasa por una polea sin peso ni rozamiento enrollada alrededor del tambor cilíndrico macizo B, solidaria del disco A. A éste está unida una masa puntual D, como indica la figura. Las masas A, B, C y D son respectivamente 65, 15, 8 y 4 kg. Se supone que la cuerda permanece siempre horizontal. Calcular:
a) Aceleración angular del disco.
b) Aceleración tangencial de D.
c) Aceleración normal de D, 4 s después de partir del reposo.



Solución.
a) Calculemos en primer lugar el momento de inercia del sistema A-B-D.

$$I = \frac{1}{2}m_A R_A^2 + \frac{1}{2}m_B R_B^2 + \frac{1}{2}m_D R_D^2$$
= 51,56 kg m^2

Aplicando la segunda ley de Newton en la masa C:
$m_C g - T = m_C a$
$8g - T = 8\,\alpha R_A$
Aplicando la segunda ley de Newton de la rotación en el conjunto giratorio:
$TR_B = I\alpha$
Resolviendo el sistema formado:

$$\left.\begin{aligned} 8gR_B - TR_B &= 8\alpha R_B^2 \\ TR_B &= I\alpha \end{aligned}\right\} \quad 8gR_B = 8aR_B^2 + I\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{8gR_B}{8R_B^2 + I} = \frac{35{,}28}{53{,}18} = 0{,}66 \text{ rad/s}^2$$

b) $a_0 = \alpha R_0$ = 0,6 m/s^2

c) $\omega_{(4s)} = \alpha\, t$ = 2,65 rad/s
$a_N = \omega^2 R_D$ = 6,34 m/s^2

EQUILIBRIO ESTÁTICO

En el capítulo 5 vimos que para que una partícula estuviera en equilibrio estático era suficiente que La fuerza resultante fuese cero.

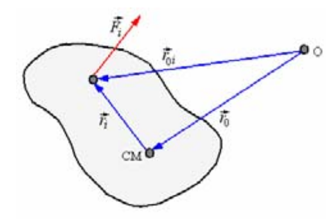
$$\sum \vec{F} = 0$$

Esta condición también, es necesaria para que un cuerpo rígido este en equilibrio, pero no es suficiente que solamente el centro de masa este en reposo, el cuerpo puede girar Es necesario que el momento de: fuerzas o torque con respecto al centro de masa sea nulo.

$$\sum \vec{\tau} = 0$$

A continuación desarrollaremos algunos ejemplos de aplicación. En muchos de ellos la fuerza de la gravedad ejercida sobre las diversas partes de un cuerpo puede sustituirse por una sola fuerza, el peso total actuando en el centro de gravedad.
Si la aceleración de la gravedad no varía a lo largo del cuerpo, el centro de gravedad coincide con el centro de masa.

Ejemplo 16. Demostrar que cuando un cuerpo está en equilibrio y el torque con respecto al centro de masa es cero, el torque con respecto a cualquier punto también es cero.
Solución.



En la figura
$\vec{r}_O$ es el vector del centro de masa a O

$\vec{r}_i$ es el vector del centro de masa al punto donde actúa $\vec{F}_i$.

$\vec{r}_{Oi}$ es el vector del punto O al punto donde actúa $\vec{F}_i$.

De la figura vemos:

$\vec{r}_i = \vec{r}_O + \vec{r}_{Oi}$

El torque total alrededor de O es

$$\vec{\tau}_O = \sum_i \vec{r}_{Oi} \times \vec{F}_i = \sum_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_O\right) \times \vec{F}_i =$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \sum_i \vec{r}_O \times \vec{F}_i = \vec{\tau}_{CM} - \sum_i \vec{r}_O \times \vec{F}_i$$

Como $\vec{r}_O$ es constante

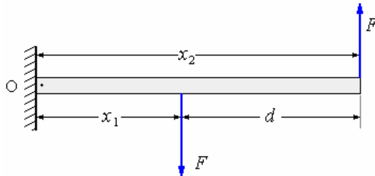
$$\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_{CM} - \sum_i \vec{r}_O \times \vec{F}_i$$

Para un cuerpo en equilibrio $\sum \vec{F}_i = 0$

tal que $\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_{CM}$

Si $\vec{\tau}_{CM} = 0$, el torque alrededor de cualquier punto debe ser cero y viceversa.

Ejemplo 17. Par de fuerzas. Dos fuerzas iguales y opuestas que actúan en la figura siguiente se denominan par de fuerzas, Según se indica



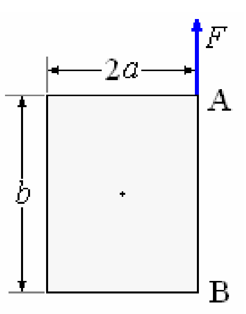
F es el valor de cualquiera de las fuerzas y $d = \left(x_2 - x_1\right)$ es la distancia entre ellas.

El momento o torque producido por estas fuerzas con respecto a O es:

$$\tau_O = Fx_2 - Fx_1 = F\left(x_2 - x_1\right) = Fd$$

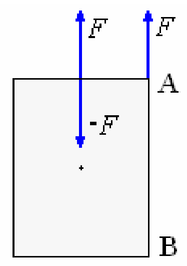
Este resultado no depende de la selección del punto O, el momento producido por un par es el mismo respecto a cualquier punto del espacio.

Ejemplo 18. Una fuerza vertical F que actúa en A. en el sólido rectangular mostrado en la figura, queremos sustituirla por otra cuya línea de acción pasa por el centro de masa más un par de fuerzas que actúen horizontalmente aplicados en A y B.

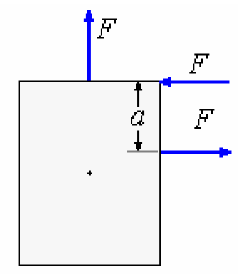


Solución.

a) Sustituir la fuerza vertical dada por otra igual paralela cuya línea de acción pase por el centro de masa.



b) Hacer girar el plano del par, hasta desplazarlo hasta la línea A B.



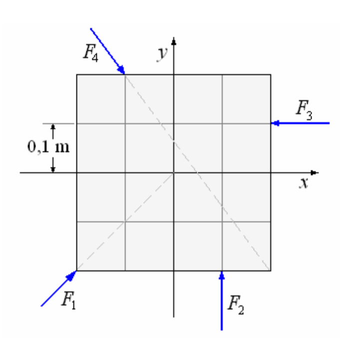
c) Se cambian los módulos de las fuerzas a F' de tal modo que:

$$F'b = Fa \Rightarrow F' = F\frac{a}{b}$$

Ejemplo 19. Sobre una placa sólida actúan cuatro fuerzas de módulos

F_1 = 28,3 N, F_2 = 60 N, F_3 = 20 N y F_4 = 50 N.

Como se indican en la figura. Hallar la tuerza resultante sobre la placa y determinar su línea de acción.



Solución.
Utilizando el cuadriculado obtenemos:

$\vec{r}_1 = -0,2\hat{i} - 0,2\hat{j}$,

$\vec{F}_1 = 28,3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\hat{i} + 28,3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\hat{j} = 20\hat{i} + 20\hat{j}$

$\vec{r}_2 = 0,1\hat{i} - 0,2\hat{j}$, $\vec{F}_2 = 60\hat{j}$

$\vec{r}_3 = 0,2\hat{i} + 0,1\hat{j}$, $\vec{F}_3 = -20\hat{i}$

$\vec{r}_4 = -0,1\hat{i} + 0,2\hat{j}$, $\vec{F}_4 = 50\left(\frac{3}{4}\right)\hat{i} - 50\left(\frac{3}{4}\right)\hat{j}$

$= 30\hat{i} - 40\hat{j}$

La fuerza resultante es

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$

$= (20 - 20 + 30)\hat{i} + (20 + 50 - 40)\hat{j}$

$= \left(30\hat{i} + 40\hat{j}\right)N$

El torque resultante respecto al centro de masa es la suma de los torques individuales.

$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \vec{\tau}_4$

Siendo:

$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$

$= \left(-0,2\hat{i} - 0,2\hat{j}\right) \times \left(20\hat{i} + 30\hat{j}\right) = 0$

$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$

$= \left(0,1\hat{i} - 0,2\hat{j}\right) \times \left(60\hat{j}\right) = 6\hat{k}$

$\vec{\tau}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$

$= \left(0,2\hat{i} + 0,1\hat{j}\right) \times \left(-20\hat{j}\right) = 2\hat{k}$

$\vec{\tau}_4 = \vec{r}_4 \times \vec{F}_4$

$= \left(-0,1\hat{i} + 0,2\hat{j}\right) \times \left(20\hat{i} - 40\hat{j}\right) = -2\hat{k}$

Reemplazando:

$\vec{\tau} = 6\hat{k}$ Nm

Para determinar la línea de acción de la tuerza, consideremos que el punto de aplicación de la fuerza resultante es:

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

Tal que

$\vec{\tau} = 6\hat{k} = \vec{r} \times \vec{F} = \left(x\hat{i} + y\hat{j}\right) \times \left(30\hat{i} + 40\hat{j}\right)$

$= (40x - 30y)\hat{k}$

De aquí:

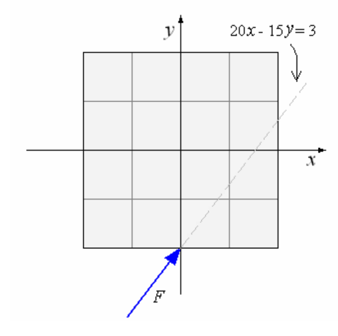
$(40x - 30y) = 6$

$\Rightarrow 20x - 15y = 3$

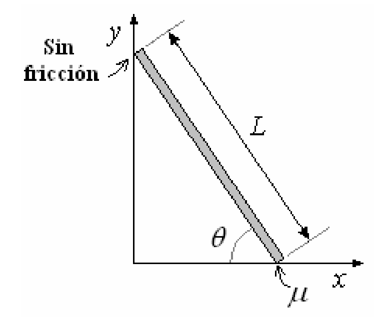
Esta es la ecuación de la línea de acción de la fuerza; si esta tuerza a de situarse en algún punto del borde inferior de la placa, y = - 0,2 m..
Obtenemos

$x = \frac{3 + 15y}{20} = \frac{3 + 15(-0,2)}{20} = 0$

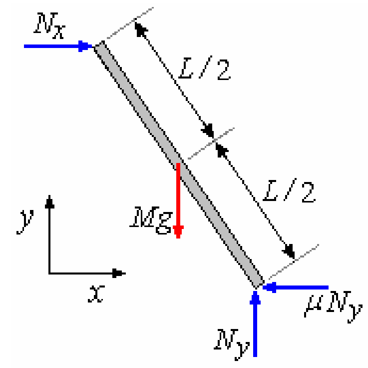
La figura siguiente muestra la fuerza resultante:



Ejemplo 20. Se tiene una escalera dé masa M y largo L apoyada contra la pared .No hay fricción en la pared y el coeficiente de fricción del piso es μ . ¿Cuál es el mínimo ángulo de inclinación para que no comience a resbalar?



Solución.
La figura siguiente muestra el diagrama del cuerpo libre de la escalera.



Condición para que el centro de masa no acelere:

$\sum F_x = 0 = N_x - \mu N_y$,
$\sum F_y = 0 = Mg - N_y$

De aquí obtenemos:

$N_y = Mg$, $N_x = \mu N_y = \mu Mg$

Condición de no rotación:
La suma de momentos de fuerza con respecto al centro de masa es cero.

$$N_y \frac{L}{2}\cos\theta - \mu N_y \frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta - N_x \frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta = 0$$

Reemplazando las fuerzas:

$$Mg\frac{L}{2}\cos\theta - \mu Mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta - \mu Mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\Rightarrow 2\mu\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\mu}\right)$$

Otra forma:
En lugar de tomar el centro de masa como origen tomemos extremo inferior de la escalera.
Tomando momentos con respecto a este punto.

$$Mg\frac{L}{2}\cos\theta - N_x L\operatorname{sen}\theta = 0$$

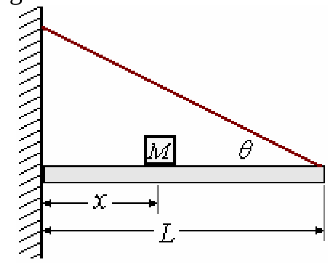
Reemplazando el valor de N_x:

$$Mg\frac{L}{2}\cos\theta - \mu MgL\operatorname{sen}\theta = 0$$

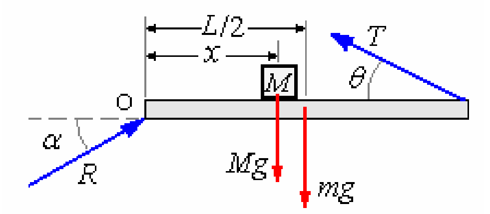
$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\mu}\right)$$

Obtenemos la misma respuesta porque no importa con respecto a que eje tomemos el torque.

Ejemplo 21. Una viga de masa m se empotra a la pared como se muestra en la figura y se sujeta por medio de un alambre. Si la tensión en el alambre excede T_m el alambre se rompe. ¿Para qué valor de x, el alambre se romperá por una masa M colocada sobre la viga?



Solución.
La figura muestra el diagrama del cuerpo libre del sistema viga-masa.



R es a reacción de la pared.
Como el sistema está en equilibrio

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\begin{cases} \sum F_x = R\cos\alpha - T\cos\theta = 0 \\ \sum F_y = R\operatorname{sen}\alpha - T\operatorname{sen}\theta - Mg - mg = 0 \end{cases}$$

Con $\sum \vec{\tau} = 0$ alrededor de cualquier punto.
Tomamos momentos con respecto a O.

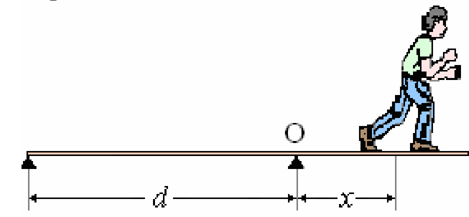
$$TL\operatorname{sen}\theta - mg\frac{L}{2} - Mgx = 0$$

De esta última ecuación obtenemos

$$x = \frac{TL\operatorname{sen}\theta - mg\dfrac{L}{2}}{Mg}$$

Si $T = T_m$ obtenemos el valor máximo de x.
Si estuviéramos interesados en conocer R, sería mejor tomar momentos con respecto al otro extremo.

Ejemplo 22. Un albañil de 75 kg camina sobre un tablón de 3 m de largo y 80 kg apoyado sobre dos vigas distantes 2 m, tal como indica la figura. ¿Cuál es la máxima distancia x que puede recorrer, sin que caiga?



Solución.
Para que el tablón gire, el torque del peso del albañil respecto del punto O, más el torque del peso de la parte de tablón que sobresale, debe ser mayor o igual que el torque del peso de la parte de tablón apoyada entre las vigas:
Llamando λ a la densidad lineal del tablón:

$\lambda = \dfrac{M}{L}$, haciendo d = 2 m, L = longitud del tablón, M = masa tablón, m = masa albañil tendremos:

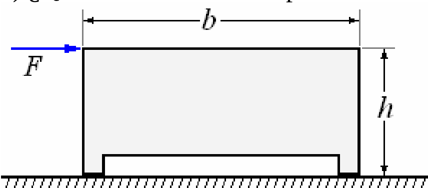
$$mgx + \lambda(L-d)g\frac{(L-d)}{2} = \lambda dg\frac{d}{2}$$

$$\Rightarrow mx + \lambda\left[d^2 - (L-d)^2\right] = \frac{M}{2L}\left(2Ld - L^2\right),$$

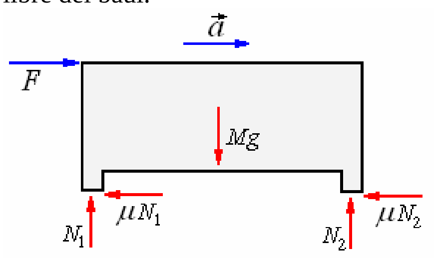
$$\Rightarrow x = \frac{M}{2m}(2d - L) = 0{,}53 \text{ m}$$

Ejemplo 23. Un baúl de masa M se empuja sobre un suelo con coeficiente de rozamiento
a) Qué fuerza F se ejerce si el baúl se mueve con aceleración constante a?
b) ¿Si el baúl se mueve con velocidad constante?

c) ¿Qué fuerza se necesita para inclinar el baúl?



Solución.
La figura siguiente muestra el diagrama del cuerpo libre del baúl.



a) Aplicando la segunda ley de Newton.

$$\sum F_x = F - \mu_k (N_1 + N_2) Ma ,$$

$$\sum F_y = N_1 + N_2 - Mg = 0$$

Resolviendo las ecuaciones:

$$F = M(a + \mu_k g)$$

b) En el caso que el baúl va con velocidad constante

$a = 0$ y $F = M\mu_k g$

c) Para analizar la inclinación del baúl tenemos que escribir la ecuación de momentos con respecto al borde delantero, sin rotación $\alpha = 0$, luego

$$\sum \tau = -bN_1 - hF + \frac{b}{2} Mg = 0$$

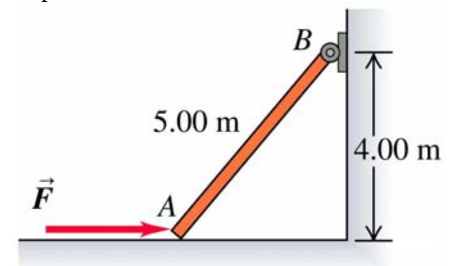
Cuando el baúl empiece a inclinarse, empezará a rotar en el sentido horario y $N_1 = 0$, de aquí:

$$F = \frac{bMg}{2h}$$

y la aceleración:

$$a = \frac{F}{M} - \mu_k g = \left(\frac{b}{2h} - \mu_k\right) g$$

Ejemplo 24. El extremo *A* de la barra *AB* de la figura descansa en una superficie horizontal sin fricción, y el extremo *B* tiene una articulación. Se ejerce en *A* una fuerza horizontal *F* de magnitud 120 N. Desprecie el peso de la barra. Calcule las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la barra sobre la articulación en *B*.



Solución.

La componente horizontal de la fuerza ejercida en la barra por la bisagra debe equilibrar la fuerza $\vec{F}$ aplicada, y así tiene magnitud 120,0 N y es hacia la izquierda.

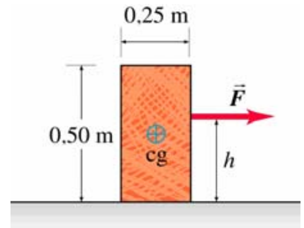
Tomando torques alrededor del punto *A*

$$(120{,}0\ \text{N})(4{,}00\ \text{m}) + F_V (3{,}00\ \text{m})$$

La componente vertical es – 160 N, el signo menos indica una componente hacia abajo, ejerciendo un torque en una dirección opuesta a la de la componente horizontal.

La fuerza ejercida por la barra en la bisagra es igual en magnitud y contrario en la dirección a la fuerza ejercida por la bisagra en la barra

Ejemplo 25. La caja es arrastrada sobre una superficie horizontal con rapidez constante por una fuerza. El coeficiente de fricción cinética es de 0,35.
a) Calcule la magnitud de *F*.
b) Determine el valor de *h* con el cual la caja comience a volcarse.



Solución.

a) $F = F_f = \mu_k N = \mu_k mg$

$$= (0{,}35)(30{,}0\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2)$$

= 103 N

b) Con respecto al borde delantero de la caja.
El brazo de palanca del peso es

$$\frac{0{,}250}{2} = 0{,}125\ \text{m}$$

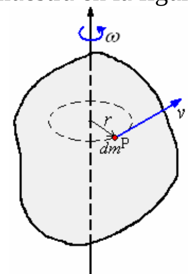
El brazo de palanca *h* de la fuerza aplicada es entonces

$$h = (0{,}125)\frac{mg}{F} = (0{,}125)\frac{1}{\mu_k}$$

$$= \frac{0{,}125}{0{,}35} = 0{,}36\ \text{m}.$$

TRABAJO Y ENERGIA EN ROTACIÓN.

Consideremos un cuerpo que gira alrededor de un eje tal como se muestra en la figura



La energía cinética de un elemento de masa *dm* que gira a una distancia *r* del eje de rotación es:

$dK = \frac{1}{2} dmv^2, \quad v = \omega r$

$\Rightarrow dK = \frac{1}{2} dm\omega^2 r^2$

Integrando.

$K = \int dK = \int_M \frac{1}{2}\omega^2 r^2 dm$

como ω es constante.

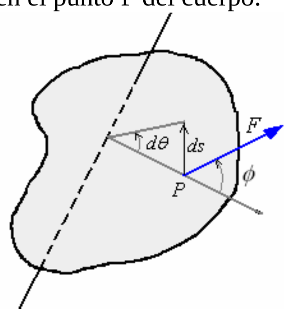
$K = \int dK = \frac{1}{2}\omega^2 \int_M r^2 dm$

El término integral es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje de rotación

$K = \frac{1}{2} I\omega^2$

Para relacionar la energía cinética, al trabajo efectuado sobre el cuerpo por un torque τ.

Supongamos que se aplica una fuerza externa única *F*, que actúa en el punto P del cuerpo.



El trabajo realizado por $\vec{F}$ a medida que el cuerpo gira recorriendo una distancia infinitesimal $ds = rd\theta$ en un tiempo *dt* es:

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F\text{sen}\phi rd\theta$

Como $F\text{sen}\phi r$ es el torque de la fuerza *F* alrededor del origen se puede escribir el trabajo realizado para la rotación infinitesimal como:

$dW = \tau d\theta$

Cuando el cuerpo gira en torno a un eje fijo bajo la acción de un torque. El cambio de su energía cinética durante el intervalo *dt* se puede expresar como:

$dK = \frac{dK}{dt}dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)dt$

$= I\omega \frac{d\omega}{dt}dt = I\omega\alpha dt = I\alpha\, \omega dt$

Como

$\tau = I\alpha$ y $d\theta = \omega dt$

Obtenemos:

$dK = \tau\, d\theta = dW$

Si se íntegra esta expresión se obtiene el trabajo total

$W_{1\to 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\, d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega$

$= \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2$

$= K_2 - K_1 = \Delta K$

"E1 trabajo neto realizado por las fuerzas externas al hacer girar un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo es igual al cambio en la energía cinética de rotación".

Por la analogía que existe entre las expresiones para el movimiento lineal y el movimiento angular, podemos decir que un torque será conservativo a condición que exista una función potencial $U = U_{(\theta)}$ de tal modo que el trabajo efectuado por $\vec{\tau}$, cuando el cuerpo sufre un desplazamiento angular $(\theta_2 - \theta_1)$ es la diferencia $\left(U_{(\theta_1)} - U_{(\theta_2)}\right)$.

Así pues se deduce que:

$U_{(\theta_1)} - U_{(\theta_2)} = K_2 - K_1$

ó $K_1 + U_{(\theta_1)} = K_2 + U_{(\theta_2)} = \text{constante}$

Cuando el sistema no es conservativo

$W_{\text{NO CONSERVATIVO}} = \left(K_1 + U_{(\theta_1)}\right) - \left(K_2 + U_{(\theta_2)}\right)$

POTENCIA

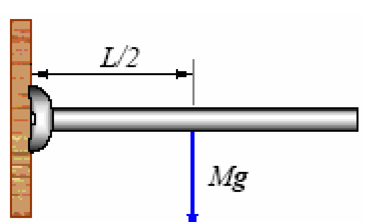
La rapidez con que se realiza este trabajo es:

$\frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$

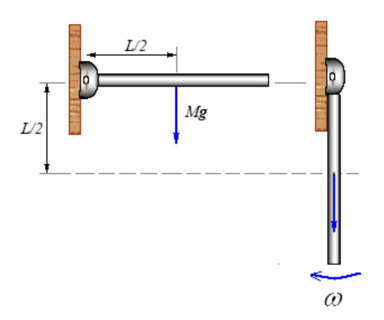
Expresión que corresponde a la **potencia** instantánea.

$P = \tau\omega$

Ejemplo 26. Para la barra giratoria, calcular su rapidez angular y la rapidez lineal de su centro de masa y del punto mas bajo de la barra cuando está vertical.



Solución.



Usando el principio de conservación de la energía, considerando que la energía potencial se calcula

respecto al centro de masa y la energía cinética es de rotación:

$$E_i = E_f \Rightarrow K_i + U_{gi} = K_f + U_{gf}$$

Cuando la barra esta inicialmente horizontal no tiene *Ki* y cuando esta vertical tiene solo K_f, entonces:

$$Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2 \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Para calcular la rapidez del centro de masa, se usa:

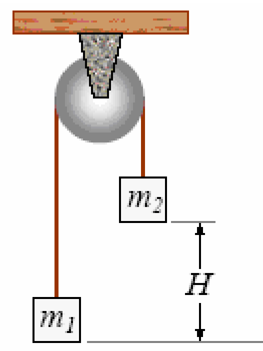
$$v_{cm} = r\omega = \frac{L}{2}\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

En el punto mas bajo la rapidez es

$$v = 2v_{cm} = \sqrt{3gL}$$

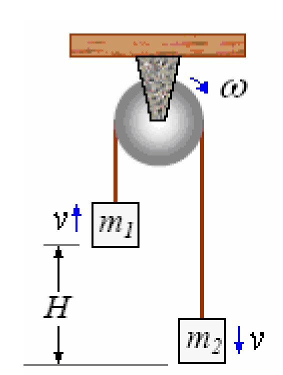
Ejemplo 27. Para el sistema de la figura, las masas tiene momento de inercia *I* en torno a su eje de rotación, la cuerda no resbala en la polea y el sistema se suelta desde el reposo.

Calcular la rapidez lineal de las masas después que una ha descendido *H* y la rapidez angular de la polea.



Solución.
Como no hay roce en la polea, se conserva la energía, que aplicada a cada masa m_1 y m_2, suponiendo que m_2 se encuentra inicialmente en la parte superior del sistema, es:

$$E_i = E_f$$

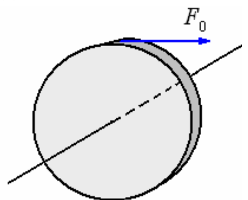


$$\Rightarrow K_{1i} + K_{2i} + U_{1i} + U_{2i}$$
$$= K_{1f} + K_{2f} + K_p + U_{1f} + U_{2f}$$
$$\Rightarrow 0 + m_2 gH$$
$$= \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + m_1 gH$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v^2 = (m_2 - m_1)gH$$

Donde se ha usado la relación $v = R\,\omega$, despejando v se obtiene:

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gH}{m_1 + m_2 + \dfrac{I}{R^2}}}$$

Ejemplo 28. Sobre un cilindro homogéneo de radio *R* y masa *M*. tiene El cual tiene libertad de girar sin fricción sobre un eje, como se muestra en la figura. Si se le aplica en su borde una fuerza tangencial de magnitud *F*.
a) ¿Cuál es la aceleración angular α del cilindro?
b) ¿Cual es la velocidad angular y la energía cinética del cilindro al tiempo *t*?
c) ¿qué cantidad de trabajo aplica la fuerza durante este intervalo *t*?.



Solución.
El momento de inercia del cilindro en torno a su eje es:

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

a) Con $\tau = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\tau}{I}$, $\tau = F_0R$

tenemos $\alpha = \dfrac{F_0R}{\frac{1}{2}MR^2} = \dfrac{2F_0}{MR}$

b) Siendo α constante

$$\omega = \omega_0 + \alpha\, t$$

Si $\omega_0 = 0$, $\omega = \alpha\, t$, $\omega = \dfrac{2F_0}{MR}t$

La energía cinética:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{2F_0}{MR}t\right)^2$$
$$= \frac{F_0^2}{M}t^2$$

c) El trabajo realizado

$$W = \Delta K = K_2 - K_1 = \frac{F_0^2}{M}t^2 - 0$$
$$= \frac{F_0^2}{M}t^2$$

Otra forma de calcular es:

$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau \, d\theta$, $\tau = F_0 R$ (constante)

$W = F_0 R(\theta_2 - \theta_1) = F_0 R \Delta\theta$

Con $\alpha = \dfrac{2F_0}{MR}$, $\omega_0 = 0$

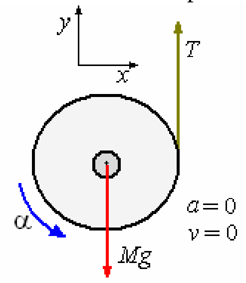
$\Rightarrow \theta = \dfrac{1}{2}\alpha t^2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2F_0}{MR}\right)t^2 = \dfrac{F_0}{MR}t^2$

Finalmente

$W = F_0 R\left(\dfrac{F_0}{MR}t^2\right) = \dfrac{F_0^2}{M}t^2$

Ejemplo 29. Un carrete de hilo delgado tiene radio *R* y masa *M*. Si se jala el hilo de tal modo que el centro de masa del carrete permanezca suspendido en el mismo lugar.
a) ¿Qué fuerza se ejerce sobre el carrete?
b) ¿Cuánto trabajo se habrá realizado cuando el carrete gira con velocidad angular ω?

Solución.
La figura muestra al carrete suspendido.



El carrete solo tiene movimiento circular ya que está en equilibrio vertical
Aplicando las leyes de Newton:

$\sum F_y = 0 \Rightarrow T - Mg = 0$

$\sum \tau = I\alpha \Rightarrow TR = I\alpha$

Como $I = \dfrac{1}{2}MR^2$, obtenemos:

$MgR = \dfrac{1}{2}MR^2\alpha$

y $\alpha = \dfrac{2g}{R}$

a) La fuerza que se ejerce sobre el carrete es
$T = Mg$

b) Como el trabajo realizado es:
$W = \tau\,\Delta\theta$, donde $\tau = TR = MgR^2$

Siendo α constante $\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$

Si $\omega_0 = 0 \Rightarrow \omega^2 = 2\alpha\Delta\theta$ y

$$\Delta\theta = \frac{\omega^2}{2\alpha} = \frac{\omega^2 R}{4g}$$

Luego $W = MgR\dfrac{\omega^2 R}{4g} = \dfrac{1}{4}M\omega^2R^2$

Otra forma de evaluar el trabajo es por la conservación de la energía.

$W = \Delta K = K_2 - K_1 = \dfrac{1}{2}I\omega^2 - 0$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 = \dfrac{1}{4}M\omega^2R^2$

Ejemplo 30. Una plataforma cilíndrica uniforme de 180 kg de masa y 4,5 m de radio se frena de 3,2 rev/s al reposo en 18 s cuando se desconecta el. motor. Calcular la potencia de salida del motor (hp) para mantener una velocidad constante de 3,2 rev/s.

Solución.
Como primer paso debemos conocer cuál es el torque de frenado que tenemos que vencer para mantener la velocidad constante, ese torque lo calcularemos de la siguiente manera:

$\tau_{\text{frenado}} = I\alpha_{\text{frenado}}$

$I = \dfrac{1}{2}MR^2$.

$\alpha_{\text{frenado}} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = -\dfrac{\omega}{t}$

$\tau_{\text{frenado}} = \dfrac{1}{2}MR^2\dfrac{\omega}{t} = \dfrac{MR^2\omega}{2t}$

La potencia es:

$P = \tau\,\omega = \dfrac{MR^2\omega^2}{2t}$

Siendo
M =180 kg, R = 4,5 m,

$\omega = 3{,}2\dfrac{\text{rev}}{\text{s}}\dfrac{2\pi\ \text{rad}}{\text{rev}} = 6{,}4\pi\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$,

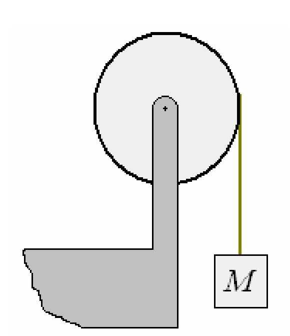
t = 18 s.

$P = \dfrac{(180)(4{,}5)^2(6{,}4\pi)^2}{2(18)}$ = 40889,73 W

Como 1 hp = 735,5 W

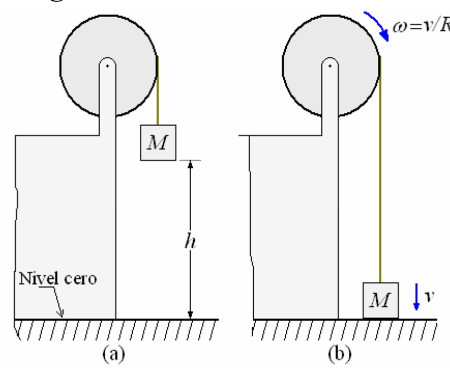
P = 55,6 hp

Ejemplo 31. Se sujeta una masa *M* a una cuerda ligera enrollada alrededor de una rueda de momento de inercia *I* y radio *R*. Hallar La tensión de la cuerda, la aceleración y su velocidad después de haber descendido una distancia *h* desde el reposo. Resolver desde el punto de vista de energía.



Solución.
Por el principio de conservación de la energía E_{total} = constante
Al inicio del movimiento toda la energía es potencial, si consideramos como nivel cero el indicado en la figura (a).

$E_i = Mgh$



La energía final es pura energía cinética, de la nasa M con velocidad v antes de chocar y el disco con momento de Inercia I con velocidad angular $\omega = v/R$, figura (b).

$$E_f = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$= \frac{v^2}{2}\left(M + \frac{1}{R^2}\right)$$

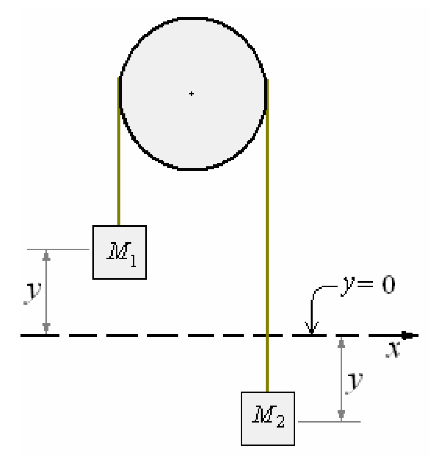
Como $E_i = E_f$

$$Mgh = \frac{v^2}{2}\left(M + \frac{1}{R^2}\right)$$

y $v^2 = \dfrac{2M}{M + 1/R^2}gh$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2M}{M + 1/R^2}gh}$$

Ejemplo 32. Resolver la máquina le Atwood utilizando Conceptos de trabajo y energía,
Solución.



Las masas M_1 y M_2 inicialmente están en reposo en la posición $y = 0$, después de soltarlas una sube y la otra baja como muestra la figura.
Las masas estarán moviéndose con velocidad v la Polea tendrá una velocidad angular ω.
Como no hay rozamiento por la conservación de la energía

$E_1 = E_2$

$$0 = +\frac{1}{2}M_1v^2 + \frac{1}{2}M_2v^2 +$$

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + M_1gy - M_2gy$$

Siendo $\omega = \dfrac{v}{R}$, $I = \dfrac{1}{2}MR^2$, tenemos:

$$\frac{1}{2}\left(M_1 + M_2 + \frac{M}{2}\right)v^2 = (M_1 - M_2)gy$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2(M_1 - M_2)}{\left(M_1 + M_2 + \frac{M}{2}\right)}gy$$

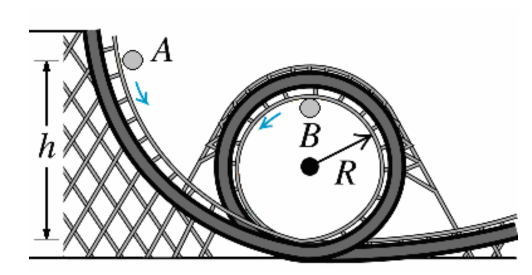
Para un movimiento uniformemente acelerado

$v^2 = 2ay$

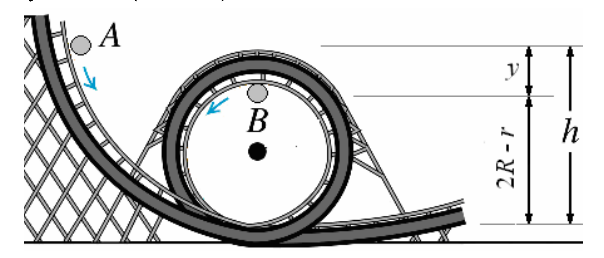
Comparando:

$$a = \frac{(M_2 - M_1)}{(M_2 + M_1 + M/2)}g$$

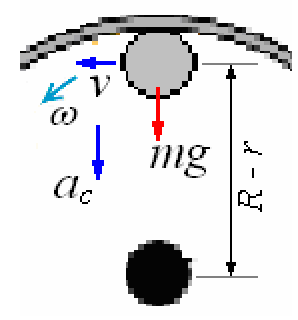
Ejemplo 33. Una canica sólida uniforme de radio r parte del reposo con su centro de masa a una altura h sobre el punto más bajo de una pista con un rizo de radio R. La canica rueda sin resbalar. La fricción de rodamiento y la resistencia del aire son despreciables.
a) ¿Qué valor mínimo debe tener h para que la canica no se salga de la pista en la parte superior del rizo? (Nota: r no es despreciable en comparación con R.)
b) ¿Qué valor debe tener h si la pista está bien lubricada, haciendo despreciable la fricción?



Solución.
a) De a a B, la distancia que la canica ha caído es
$y = h - (2R - r) = h + r - 2R.$



El radio de la trayectoria del centro de masa de la canica es $R - r$, .



La condición para que la canica permanezca en la pista es

$$\sum F_r = ma_c \Rightarrow -mg = -m\frac{v^2}{(R-r)} \Rightarrow$$

$$v^2 = g(R - r).$$

La velocidad se determina del teorema del trabajo - energía,

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Se tiene:

$$y = h - (2R - r)$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Se sabe que para una esfera

$$I = \frac{2}{5}mr^2$$

Reemplazando estos valores en la ecución de la energía:

$$mg(h - 2R + r) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

$$\Rightarrow$$

$$g(h - 2R + r) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}v^2 = \frac{7}{10}v^2 \Rightarrow$$

$$g(h - 2R + r) = \frac{7}{10}v^2$$

Reemplazando el valor de v^2 :

$$g(h - 2R + r) = \frac{7}{10}g(R - r) \Rightarrow$$

$$h - 2R + r = \frac{7}{10}(R - r) \Rightarrow$$

$$h = 2R - r + \frac{7}{10}(R - r)$$

$$= 2R - r + \frac{7}{10}(R - r)$$

$$= \frac{27}{10}R - \frac{17}{10}r$$

$$= 2,7R - 1,7r$$

b) En ausencia de fricción no habrá rotación. Luego:

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2$$

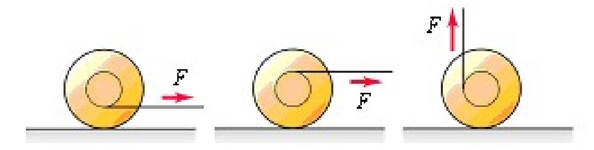
Sustituyendo las expresiones para y y v^2 en términos de los otros parámetros da

$$h - 2R + r = \frac{1}{2}(R - r)$$

Resolviendo obtenemos

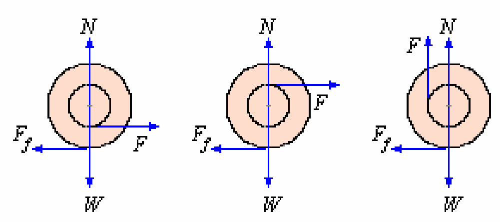
$$h = \frac{5}{2}R - \frac{3}{2}r.$$

Ejemplo 34. La figura muestra tres yoyos idénticos que inicialmente están en reposo en una superficie horizontal. Se tira del cordel de cada uno en la dirección indicada. Siempre hay suficiente fricción para que el yoyo ruede sin resbalar. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada yoyo. ¿En qué dirección girará cada uno? Explica tus respuestas

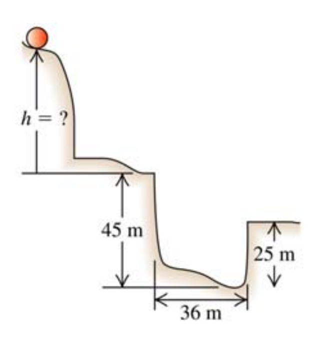


Solución. En el primer caso, $\vec{F}$ y la fuerza de la fricción actúan en direcciones opuestas, y la fuerza de fricción tiene el torque mayor que hace rotar el yo-yo a la derecha. La fuerza neta a la derecha es la diferencia $F - F_f$, tal que la fuerza neta es a la derecha mientras que el torque neto causa una rotación a la derecha.

Para el segundo caso, el torque y la fuerza de fricción tienden a dar vuelta al yoyo a la derecha, y el yo-yo se mueve a la derecha.
En el tercer caso, la fricción tiende a mover al yo-yo a la derecha, y puesto que la fuerza aplicada es vertical, el yoyo se mueve a la derecha.



Ejemplo 35.
Una canica uniforme baja rodando sin resbalar por el trayecto de la figura, partiendo del reposo.
a) Calcule la altura mínima *h* que evita que la canica caiga en el foso.
b) El momento de inercia de la canica depende de su radio. Explique por qué la respuesta a la parte (a) no depende del radio de la canica.
c) Resuelva la parte (a) para un bloque que se desliza sin fricción en vez de una canica que rueda. Compare la *h* mínima en este caso con la respuesta a la parte (a).



Solución.
a) Encuentre la velocidad *v* que necesita la canica en el borde del hoyo para hacerlo llegar a la tierra plana en el otro lado.
La canica debe viajar 36 m horizontalmente mientras cae verticalmente 20 m.
Use el movimiento vertical para encontrar el tiempo.
Tome + *y* hacia abajo.

$v_{0y} = 0,\ a_y = 9{,}80\ \text{m/s}^2,\ y - y_0 = 20\ \text{m},\ t = ?$

$y - y_0 = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow t = 2{,}02\ \text{s}$

Luego $x - x_0 = v_{0x}t \Rightarrow v_{0x} = 17{,}82\ \text{m/s}$.

Utilice la conservación de la energía, donde el punto 1 está en el punto de partida y el punto 2 está en el borde del hoyo, donde $v = 17{,}82\ \text{m/s}$.

Haga $y = 0$ en el punto 2, tal que

$y_2 = 0$ e $y_1 = h$

$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Rodar sin resbalar significa

$$\omega = \frac{v}{r}\ ,\ I = \frac{2}{5}mr^2$$

Tal que $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{5}mv^2$

$$mgh = \frac{7}{10}mv^2$$

$$\Rightarrow h = \frac{7v^2}{10g} = \frac{7(17{,}82\ \text{m/s})}{10(9{,}80\ \text{m/s}^2)}$$

= 23 m

b) $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{5}mv^2$, Independiente de *r*.

c) Todo es igual, excepto que no hay el término de energía rotacional cinética en *K*:

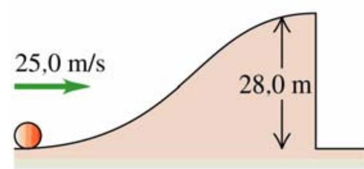
$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$h = \frac{v^2}{2g} = 16\ \text{m}.$$

Comparado con la altura de la parte (a), 16 /23 = 0,7, es el 70 %.

Ejemplo 36. Una esfera sólida uniforme rueda sin resbalar subiendo una colina, como se muestra en la figura. En la cima, se está moviendo horizontalmente y después se cae por un acantilado vertical.
a) ¿A qué distancia del pie del acantilado cae la esfera y con qué rapidez se está moviendo justo antes de tocar el suelo?
b) Observe que, al tocar tierra la esfera, tiene mayor rapidez de traslación que cuando estaba en la base de la colina. ¿Implica esto que la esfera obtuvo energía de algún lado? Explique.



Solución.
a) Use la conservación de la energía para encontrar la velocidad v_2 de la bola momentos antes que salga de la parte alta del acantilado. Sea el punto 1 en la base de la colina y el punto 2 en la cima de la colina.

Tome $y = 0$ en la base de la colina, tal que

$y_1 = 0$ e $y_2 = 28{,}0\ \text{m}$.

$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 = mgy_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2$$

Rodar sin resbalar significa $\omega = v/r$ y

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}mr^2\right)(v/r)^2 = \frac{1}{5}mv^2$$

$$\frac{7}{10}mv_1^2 = mgy_2 + \frac{7}{10}mv_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{10}{7}gy_2} = 15{,}26\ \text{m/s}$$

Considere el movimiento de proyectil de la bola, después de salir de la cima del acantilado hasta justo antes de tocar tierra. Tome $+y$ hacia abajo. Utilice el movimiento vertical para encontrar el tiempo en el aire:

$v_{0y} = 0$, $a_y = 9{,}80\ \text{m/s}^2$

$y - y_0 = 28{,}0\text{m}$, $t = ?$

$$y - y_0 = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad \Rightarrow t = 2{,}39\ \text{s}$$

Durante este tiempo la bola viaja horizontalmente

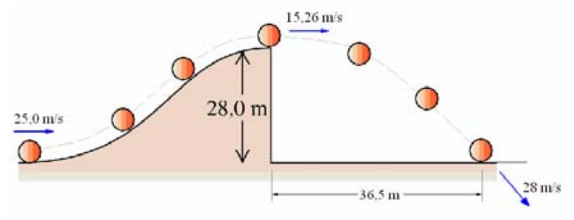
$x - x_0 = v_{0x}t = (15{,}26\ \text{m/s})(2{,}39\ \text{s}) = 36{,}5\ \text{m}$.

Justo antes de tocar tierra,

$v_y = v_{0y} + gt = 23{,}4\ \text{m/s}$ y

$v_x = v_{0x} = 15{,}26\ \text{m/s}$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 28{,}0\ \text{m/s}$



b) En la base de la colina,

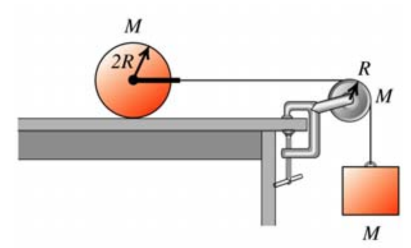
$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{25{,}0\ \text{m/s}}{r}$$

La razón de la rotación no cambia mientras la bola está en el aire, después de dejar la parte alta del acantilado, tal que momentos antes de tocar tierra

$$\omega = \frac{15{,}3\ \text{m/s}}{r}$$

La energía cinética total es igual en la base de la colina y momentos antes de tocar tierra, pero momentos antes de tocar tierra poco de esta energía es energía cinética rotatoria, así que la energía cinética de traslación es mayor.

Ejemplo 37. Un cilindro sólido uniforme de masa M y radio $2R$ descansa en una mesa horizontal. Se ata un hilo mediante un yugo a un eje sin fricción que pasa por el centro del cilindro de modo que éste puede girar sobre el eje. El hilo pasa por una polea con forma de disco de masa M y radio R montada en un eje sin fricción que pasa por su centro. Un bloque de masa M se suspende del extremo libre del hilo. El hilo no resbala en la polea, y el cilindro rueda sin resbalar sobre la mesa. Si el sistema se libera del reposo, ¿qué aceleración hacia abajo tendrá el bloque?



Solución.

Hacer este problema usando la cinemática implica cuatro incógnitas (seis, contando las dos aceleraciones angulares), mientras que usando consideraciones de la energía se simplifican los cálculos.

Si el bloque y el cilindro ambos tienen velocidad v, la polea tiene velocidad angular v/R y el cilindro tiene velocidad angular $v/2R$, la energía cinética total es

$$K = \frac{1}{2}\left[Mv^2 + \frac{M(2R)^2}{2}(v/2R)^2 + \frac{MR^2}{2}(v/R)^2 + Mv^2\right]$$

$$= \frac{3}{2}Mv^2. \quad (1)$$

Esta energía cinética debe ser el trabajo hecho por la gravedad; si la masa que cuelga desciende una distancia y,

$K = Mgy.$ (2)

De (1) y (2):

$$v^2 = \frac{2}{3}gy$$

Para aceleración constante

$v^2 = 2ay$,

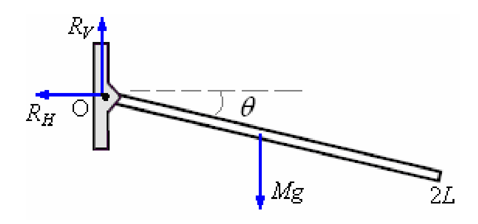
Por comparación de las dos expresiones obtenemos:

$$a = \frac{g}{3}$$

Ejemplo 38. Una barra de largo $2L$ y masa M está articulada en un extremo a un punto fijo O, inicialmente en reposo y horizontal. Si ella se suelta, comienza a rotar respecto a la articulación bajo el efecto del peso de la barra. Determine la reacción en la articulación y la velocidad angular de la barra en función del ángulo que ella ha girado.



Solución.



Por conservación de energía tenemos que

$$\frac{11}{23}M(2L)^2\dot{\theta}^2 - Mg\,\text{sen}\,\theta = 0$$

Luego la velocidad angular de la barra es:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\text{sen}\,\theta \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}\text{sen}\,\theta}$$

Además $-R_H = M\dfrac{d^2}{dt^2}L\cos\theta$,

$$R_V - Mg = M\frac{d^2}{dt^2}(-L\,\text{sen}\,\theta)$$

Entonces

$$R_H = ML\frac{1}{2\,\text{sen}\,\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta}\right)^2$$

$$= ML\frac{1}{2\,\text{sen}\,\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}^2\theta\frac{3}{2}\frac{g}{L}\text{sen}\,\theta\right)$$

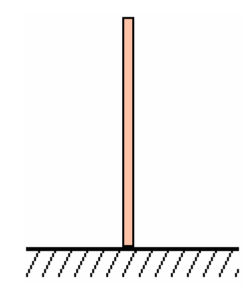
$$= \frac{9}{4}ML\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$R_V = Mg - M\frac{d^2}{dt^2}(-L\,\text{sen}\,\theta)$$

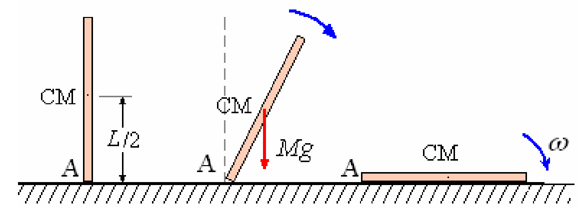
$$= Mg - ML\frac{1}{2\cos\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\cos^2\theta\frac{3}{2}\frac{g}{L}\text{sen}\,\theta\right)$$

$$= \frac{5}{2}Mg - \frac{9}{4}Mg\cos^2\theta$$

Ejemplo 39. Una barra de longitud L y masa M se coloca verticalmente sobre un plano horizontal liso, en reposo. Si ella es perturbada levemente comienza a caer. Determine:
a) La velocidad del centro de masa de la barra justo cuando ella se coloca horizontal.
b) La aceleración angular en dicho instante.



Solución.



a) Momento de inercia de la barra con respecto a un extremo

$$I_A = \frac{1}{3}ML^2$$

Por conservación de energía.

$$Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2 \Rightarrow$$

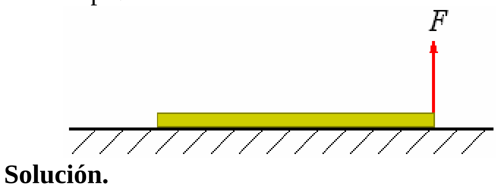
$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

$$v_{CM} = \omega\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

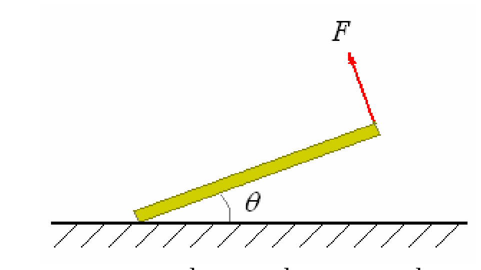
b) La aceleración angular en dicho instante.

$$\alpha = \frac{\tau_A}{I_A} = \frac{Mg\frac{L}{2}}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

Ejemplo 40. Una barra de longitud $2L$ y masa M se coloca sobre un plano horizontal liso. Si la barra es tirada por una fuerza constante F, inicialmente perpendicular a la barra y aplicada en un extremo, la barra comienza a moverse sobre el plano. La fuerza se mantiene aplicada a ese mismo extremo manteniendo su dirección original. Determine una ecuación para el ángulo que gira la barra en función del tiempo.



Solución.



El torque respecto al centro de masa conduce a

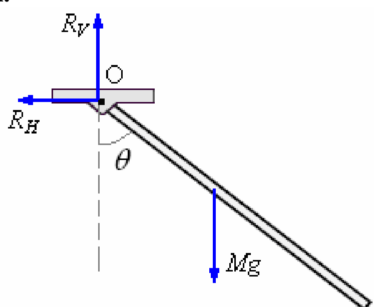
$$FL\,\text{sen}\,\theta = \frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{3F}{L}\text{sen}\,\theta$$

Ejemplo 41. Una barra de longitud L y masa M puede oscilar libremente en torno a uno de sus

extremos que se mantiene fijo, bajo la acción de su peso. Escriba la ecuación diferencial para el ángulo que ella gira.

Solución.



Por conservación de energía

$$E = \frac{11}{23} ML^2 \dot{\theta}^2 - Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

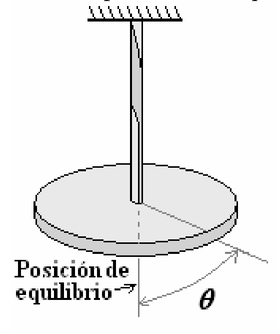
Derivando respecto al tiempo

$$\frac{1}{3} ML^2 \dot{\theta}\ddot{\theta} + Mg\frac{L}{2}\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta = 0$$

Finalmente

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\text{sen}\,\theta = 0$$

Ejemplo 42. Un péndulo de torsión consiste en un disco uniforme de masa M y radio R suspendido de una barra delgada y vertical de masa despreciable y que puede torcerse al dar vuelta al disco alrededor de su eje, como se indica en la figura. La barra tiene una Constante de elasticidad torsional k. inicialmente se hace girar el disco un ángulo θ respecto del equilibrio y luego se le suelta desde el reposo. Determinar su velocidad de rotación cuando llega nuevamente a la posición de equilibrio.



Solución.

Con la ley de Hooke para rotación,

$\tau = -k\theta$

El trabajo para torcer un ángulo θ es:

$$W = -\int_0^{\theta} \tau\, d\theta = -\int_0^{\theta}(-k\theta)d\theta = \frac{1}{2}k\theta^2$$

Este trabajo queda como energía potencial.

$$U_{(\theta)} = \frac{1}{2}k\theta^2$$

Al liberarse esta se convierte en energía cinética. Al pasar por el punto de equilibrio la energía es puramente energía cinética.

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{4}MR^2\omega^2$$

Por conservación de energía.

$$\frac{1}{2}k\theta^2 = \frac{1}{4}MR^2\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2k\theta^2}{MR^2}$$

Finalmente $\omega = \sqrt{\dfrac{2k\theta^2}{MR^2}}$

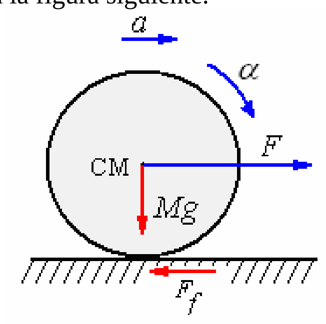
TRASLACIONES Y ROTACIONES COMBINADAS

Hasta ahora solo hemos tomado en consideración la rotación del cuerpo en torno a un eje fijo en el espacio.

La finalidad de esta sección es estudiar el caso en que el eje de rotación si acelera también vamos a presentar tres métodos analíticos de resolver este caso.

Primer método

Aplicamos la segunda ley de Newton para traslación relativa ejes no rotantes a través del centro de masa. Para ilustrar este método y los otros también, consideremos un cuerpo de radio R, masa M y momento de inercia respecto a su entro masa I, al que se le obliga a rodar sin deslizamiento a lo largo de una superficie horizontal por medio de una fuerza F que actúa en su centro de masa, La tuerza de fricción F_f y la reacción N actúan tal como se muestra en la figura siguiente.



EL cuerpo se mueve con una aceleración horizontal a que es la que corresponde a su centro de masa, y a su vez rota con aceleración angular α .

Como rueda sin deslizamiento la relación entre el desplazamiento lineal y el desplazamiento angular es $x = R\theta$.

La velocidad es

$$\frac{dx}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = R\omega$$

La aceleración es

$$\frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a = R\alpha$$

Aplicando la segunda ley de Newton para traslación

$$F - F_f = Ma$$

Aplicando la segunda ley de Newton para rotación alrededor del centro de masa

$$-RF_f = -I_{CM}\alpha$$

Eliminando F_f y α, obtenemos:

$$\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)a = F$$

La aceleración

$$a = \frac{F}{\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)}$$

Si para *t* = 0:

$x_0 = 0$, $v_0 = 0$,

Siendo *a* = constante

La velocidad es:

$$v = v_0 + at$$

$$v = \frac{F}{\left(M + I_{CM}/R^2\right)}t$$

El desplazamiento es:

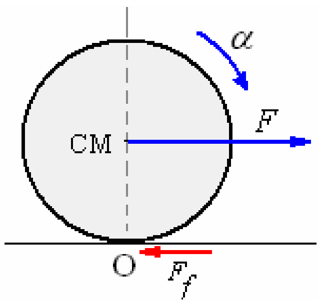
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{F}{\left(M + I_{CM}/R^2\right)}t^2$$

Segundo método

En este método escribimos la ecuación para traslación igual que en el anterior método, pero para la rotación se aplica la segunda ley de Newton con respecto al eje de rotación que pasa a través del punto de reposo instantáneo (punto de apoyo en el movimiento) si tal punto no existe no puede usarse este método

Como ilustración veamos el ejemplo anterior. El punto contacto es el punto fijo instantáneo O, consideremos que este no desliza y todos los otros puntos de eje momentáneamente rotan alrededor de el.



En este caso como la aceleración del centro masa es *a*, la aceleración angular del cuerpo alrededor de O es $\alpha = a/R$.

Aplicando la segunda ley de Newton para traslación:

$$F - F_f = Ma$$

Aplicando la segunda ley de Newton para rotación a alrededor de O:

$$-FR = -I_O\alpha$$

Como $\alpha = a/R$ y $I_O + I_{CM} + MR^2$:

con la segunda ecuación,

$$\left(I_{CM} + MR^2\right)\frac{a}{R} = FR \Rightarrow a = \frac{F}{\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)}$$

Tercer método

Este método Consiste en usar las ecuaciones de la energía directamente.

Es un Sistema Conservativo

$$K + U = \text{Constante}$$

Resolveremos por este método el ejemplo anterior. Puesto que no hay deslizamiento la tuerza de fricción sobre el cuerpo no trabaja sobre el mientras rueda. Siendo un sistema conservativo la fuerza *F* se puede deducir de una función Potencial *U* = - *Fx* donde *x* es la coordenada horizontal del centro de nasa.

La energía *E* del cuerpo es:

$$E = K + U$$

$$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2,\ U = -Fx$$

Luego: $E = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 - Fx$

Siendo $\omega = \frac{v}{R} \Rightarrow$

$$E = \frac{1}{2}v^2\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) - Fx$$

De aquí podemos evaluar la velocidad considerando que para el instante inicial *x* = 0, y *v* = 0, por consiguiente *E* = 0.

$$\frac{1}{2}v^2\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) - Fx = 0 \text{ y}$$

$$\frac{1}{2}v^2\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) = Fx$$

$$v = \sqrt{\frac{2Fx}{\frac{I_{CM}}{R^2} + M}}$$

Siendo un movimiento con aceleración constante
$v = \sqrt{2ax}$
De esto

$$a = \frac{F}{\frac{I_{CM}}{R^2} + M}$$

Otra forma de calcular la aceleración.

Considerando que

$$E = \text{Constante} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = \left[\frac{1}{2}v^2\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) - Fx\right] = 0$$

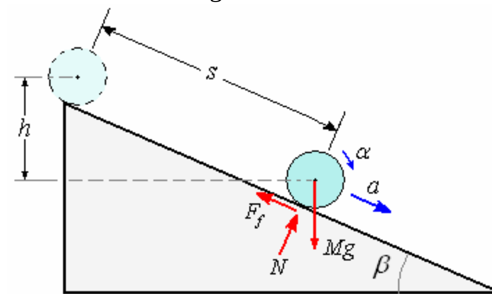
$$\Rightarrow v\frac{dv}{dt}\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) - F\frac{dx}{dt} = 0$$

Como $\frac{dv}{dt} = a$ y $\frac{dx}{dt} = v$

$$va\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) - Fv = 0 \Rightarrow$$

$$a = \frac{F}{\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)}$$

Ejemplo 43. Analizar el movimiento de un cuerpo de radio *R*, momento de inercia respecto a su centro de masa *I* que rueda sin deslizar hacia abajo en plano inclinado de ángulo θ.



Solución.
Como se muestra en la figura hay dos fuerzas que actúan sobre el cuerpo, *Mg* actúa en el centro de gravedad y la fuerza de contacto que se descompone en la reacción normal *N* y la fuerza de fricción F_f.
Vamos a resolver por el primer método.
Traslación:

$$Mg\text{sen}\beta - F_f = Ma$$

Rotación:

$$RF_f = I_{CM}\alpha$$

Por la condición de no deslizamiento:

$$\alpha = a/R$$

Eliminando α y F_f obtenemos:

$$a = \frac{Mg\text{sen}\beta}{M + I_{CM}/R^2}$$

Considerando que para $t = 0$: $s = 0$, y $v = 0$.

$$v = \left(\frac{Mg\text{sen}\beta}{M + I_{CM}/R^2}\right)t,$$

$$s = \frac{1}{2}\left(\frac{Mg\text{sen}\beta}{M + I_{CM}/R^2}\right)t^2$$

Para un anillo:

$$I_{CM} = MR^2,\ s = \frac{1}{4}g\text{sen}\beta\, t^2$$

Para un disco:

$$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2,\ s = \frac{1}{3}g\text{sen}\beta\, t^2$$

Para una esfera:

$$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2,\ s = \frac{5}{14}g\text{sen}\beta\, t^2$$

Para un plano sin fricción (sin rodadura)

$$s = \frac{1}{2}g\text{sen}\beta\, t^2$$

Por la ecuación de energía
Si para $t = 0$: $K_0 = 0$ y $U_0 = 0$

$$E = K_0 + U_0 = 0$$

Llamando h a la caída del centro de masa desde la posición de reposo, tenemos:

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2,$$

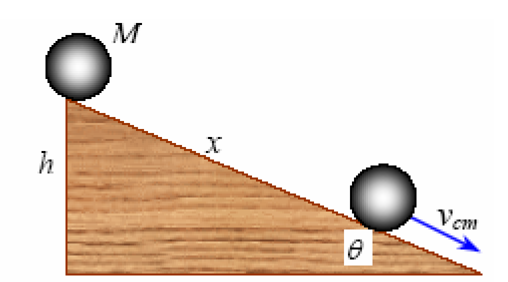
$$U = -Mgh = -Mgs\,\text{sen}\beta = 0,$$

$$\omega = v/R$$

$$\frac{1}{2}v^2\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right) - Mgs\,\text{sen}\beta$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Mg\text{sen}\beta}{M + I_{CM}/R^2}s}$$

Ejemplo 44. Usar la conservación de la energía para describir el movimiento de rodadura de un cuerpo rígido de masa *M* que rueda por un plano inclinado θ y rugoso.



Solución.
Se supone que el cuerpo rígido parte del reposo desde una altura *h* y que rueda por el plano sin resbalar la conservación de energía da:

$$E = \text{cte} \Rightarrow K + U_g = \text{cte} \Rightarrow$$

$$K_i + U_{gi} = K_f + U_{gf}$$

Pero

$Ki = 0$ *y* $Ugf = 0$, entonces

$$Mgh = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

Como

$v_{cm} = R\,\omega \Rightarrow \omega = v_{cm}/R$, se reemplaza en la ecuación anterior

$$\frac{1}{2} I_{cm} \frac{v_{cm}^2}{R^2} + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 = Mgh$$

Despejando v_{cm} se obtiene:

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{I + I_{cm}/MR^2}}$$

Por ejemplo, para una esfera sólida uniforme de momento de inercia $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$, se puede calcular su v_{cm} en el punto más bajo del plano y su aceleración lineal.

$$v_{cm}^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{(2/5)MR^2}{MR^2}} = \frac{2gh}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{10}{7} gh$$

$$\Rightarrow v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7} gh}$$

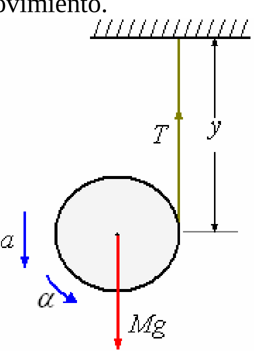
La aceleración lineal se puede calcular con la ecuación

$$v_{cm}^2 = v_{cmi}^2 + 2a_{cm}x \Rightarrow a_{cm} = \frac{v_{cm}^2}{2x}$$

De la geometría de la figura, se tiene: $h = x \,\text{sen}\, \theta$, donde *x* es la longitud del plano, reemplazando en a_{cm}:

$$a_{cm} = \frac{\frac{5}{7} gx\,\text{sen}\theta}{2x} = \frac{5}{7} g\,\text{sen}\theta$$

Ejemplo 45. Un disco homogéneo de radio *R* y masa *M* tiene una cuerda enrollada alrededor, según vemos en a figura. Sujetando el extremo libre de la cuerda a un soporte fijo, se deja caer el disco. Estudiar el movimiento.



Solución.
Vamos a resolver primero por las ecuaciones del movimiento de Newton.
Traslación.:

$$Mg - T = Ma$$

Rotación.:

$$RT = I_{CM}\alpha$$

Como:

$$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2,\ \alpha = \frac{a}{R}:$$

$$RT = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{a}{R}\right) = \frac{1}{2}MRa$$

De aquí se obtenemos:

$$T = \frac{1}{2}Ma \ \text{y}\ a = \frac{2}{3}g$$

El yo-yo funciona según este principio, está proyectado para que a sea mucho menor que *g*.

Resolviendo por conservación de la energía

$$E = K + U =$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 - Mgy$$

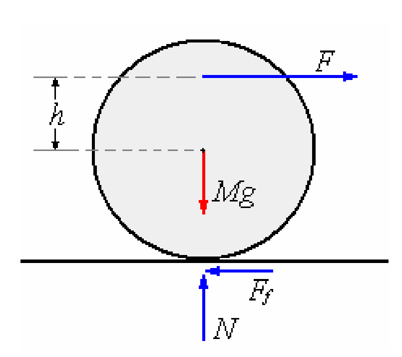
Como $E = \text{constante} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$

También $v = \frac{dy}{dt}$ y $a = \frac{dv}{dt}$

Con esto encontramos que

$$a = \frac{2}{3}g$$

Ejemplo 46. Estudiar el movimiento de un disco homogéneo de radio *R* y masa *M*, sobre el que actúa una fuerza horizontal *F* aplicada un punto variable a lo largo de una línea vertical que pasa por el centro, según se indica en la figura. Supóngase el movimiento sobre un plano horizontal.



Solución.
En la figura vemos que la fuerza *F* se aplica a una distancia *h* sobre el centro.
Suponiendo que F_f actúa hacia la izquierda.
Aplicando las leyes de Newton del movimiento:
Traslación

$$F - F_f = Ma \quad (1)$$

$$N - Mg = 0 \quad (2)$$

Rotación alrededor del centro de masa

$$Fh + F_f R = I_{CM}\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha \quad (3)$$

Considerando $\alpha = \frac{a}{R}$

$$2F\frac{h}{R} + 2F_f = Ma \quad (3a)$$

Igualando (1) y (3a)

$$F - F_f = 2F\frac{h}{R} + 2F_f$$

$$3F_f = F\left(1 - 2\frac{h}{R}\right)$$

Discusión:

a) $F_f = 0$, cuando $1 - 2\frac{h}{R} = 0 \Rightarrow h = \frac{R}{2}$

Esto quiere decir si *F* se aplica a *R*/2 del centro, la fuerza de rozamiento es cero.

b) Si $h = R$

$$3F_f = F\left(1 - 2\frac{R}{R}\right) = -F \Rightarrow F_f = -\frac{F}{3}$$

el rozamiento es en sentido contrario al indicado y la ecuación (3) se convierte en:

$$F(R) - \left(\frac{F}{3}\right)R = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}F = \frac{1}{2}MR\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{4F}{3MR}$$

Esto indica que el cilindro rueda hacia la derecha.

c) Si disminuye *h* hasta que *h* = 0.

$$3F_f = F\left[1 - 2\frac{(0)}{R}\right] = F \Rightarrow F_f = \frac{F}{3}$$

En la ecuación (3)

$$F(0) + \left(\frac{F}{3}\right)R = I_{CM}\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

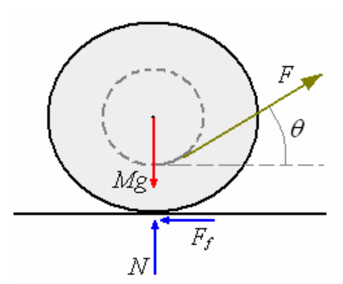
$$\frac{F}{3}R = \frac{1}{2}MR^2\alpha \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{2F}{3MR}$$

El cilindro rueda hacia la derecha.

d) Si *F* se hace muy grande tal que F_f tiende a aumentar, tan pronto como sobrepase el valor máximo posible de la tuerza de rozamiento (μN), el disco deslizará.
Se debe hacer una nueva hipótesis, esta vez se tienen también las ecuaciones (1), (2) y (3) pero $\alpha \neq a/R$.

Ejemplo 47. Un carrete de radio interior R_1 y radio exterior R_2 se halla sobre un suelo áspero. Se tira de él con una tuerza *F* mediante un hilo arrollado en torno a su cilindro interior. Se mantiene un ángulo θ con la horizontal. Se observa que hay un ángulo Crítico θ_0, tal que $\theta < \theta_o$, el carrete rueda sin deslizar en el sentido del cual se tira de él, y para $\theta > \theta_o$ el carrete rueda sin deslizar en sentido contrario, ¿Cuál es el valor del ángulo critico.



Solución.
Aplicando las leyes de Newton del movimiento;
Traslación:

$$F\cos\theta - F_f = Ma = M\alpha R_2 \quad (1)$$

$$F\text{sen}\theta - Mg + N = 0$$

Rotación:

$$-F_f R_2 + FR_1 = I_{CM}\alpha \Rightarrow$$

$$F_f R_2 = FR_1 - I_{CM}\alpha \Rightarrow$$

$$F_f = F\frac{R_1}{R_2}R_1 - \frac{I_{CM}}{R_2}\alpha \quad (2)$$

Eliminando la fuerza F_f., reemplazando (2) en (1):

$$F\cos\theta - \left(F\frac{R_1}{R_2}R_1 - \frac{I_{CM}}{R_2}\alpha\right) = Ma$$

$$\Rightarrow\ F\cos\theta - F\frac{R_1}{R_2}R_1 + \frac{I_{CM}}{R_2}\alpha = M\alpha R_2$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{R_2\cos\theta - R_1}{R_2}\right) = \left(\frac{MR_2^2 - I_{CM}}{R_2}\right)\alpha$$

$$\Rightarrow\ \alpha = F\frac{(R_2\cos\theta - R_1)}{(MR_2^2 - I_{CM})} = \frac{d\omega}{dt}$$

La rotación hará que el movimiento del carrete será hacia adelante cuando $\frac{d\omega}{dt} > 0$

$$R_2\cos\theta - R_1 > 0$$

$$\Rightarrow\ \cos\theta > \frac{R_1}{R_2}$$

El movimiento será hacia atrás cuando $\frac{d\omega}{dt} < 0$

$$R_2\cos\theta - R_1 < 0$$

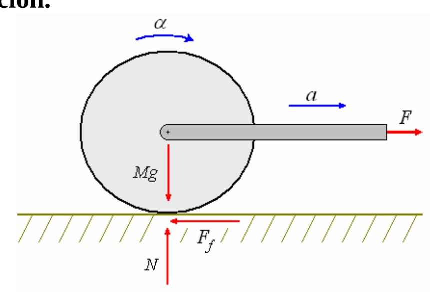
$$\Rightarrow\ \cos\theta < \frac{R_1}{R_2}$$

El ángulo crítico es cuando $\frac{d\omega}{dt} = 0$

$$R_2\cos\theta - R_1 = 0$$

$$\Rightarrow\ \cos\theta = \frac{R_1}{R_2}$$

Ejemplo 48. Un disco de masa M y radio R se apoya sobre un plano horizontal áspero de modo que puede rodar sin resbalar con su plano vertical. Si se tira del centro del disco con una fuerza horizontal constante F, determine:
a) La aceleración del centro de masa del disco.
b) La aceleración angular del disco.
c) La fuerza de roce.
Solución.



Aquí

$$F - F_f = Ma\,,\quad N - Mg = 0\,,$$

$$F_f R = \frac{1}{2}MR^2\alpha = \frac{1}{2}MRa$$

Entonces

$$F_f = \frac{1}{2}Ma$$

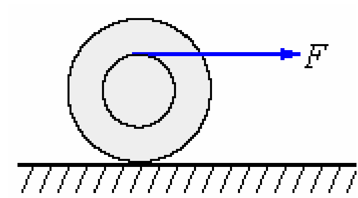
Que sustituida en la primera da:

a) $a = \frac{2F}{3M}$,

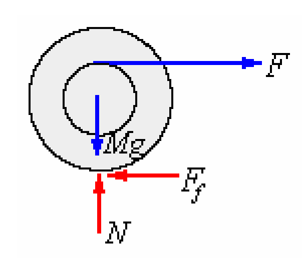
b) $\alpha = \frac{a}{R} = \frac{2F}{3MR}$,

c) $F_f = \frac{1}{2}Ma = \frac{F}{3}$

Ejemplo 49. Un disco de masa M y radio $2R$ se apoya sobre un plano horizontal áspero de modo que puede rodar sin resbalar con su plano vertical. El disco tiene un resalto de radio R como se indica en la figura, en el cual se enrolla una cuerda que se tira con una fuerza horizontal constante F, determine:
a) La aceleración del centro de masa del disco.
b) La aceleración angular del disco.
c) La fuerza de roce.



Solución.



Ahora $F - F_f = Ma$, $N - Mg = 0$

$$F_f 2R + FR = \frac{1}{2}M(2R)^2\alpha$$

$$= 2MR^2\left(\frac{a}{2R}\right) = MRa$$

Simplificando:

$$2F_f + F = Ma = F - F_f$$

$$\Rightarrow F_f = 0$$

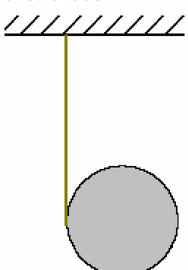
De donde resulta:

a) $a = \frac{F}{m}$

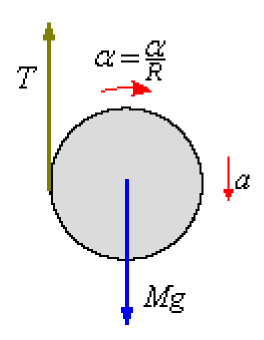
b) $\alpha = \frac{F}{2MR}$

c) $F_f = 0$

Ejemplo 50. Un disco de masa *M* y radio *R* tiene enrollada una cuerda en su periferia y cae partiendo del reposo mientras la cuerda que se sostiene de su extremo se desenrolla. Determine:
a) La aceleración de bajada del disco.
b) La tensión de la cuerda.



Solución.



Aquí $Mg - T = Ma$,

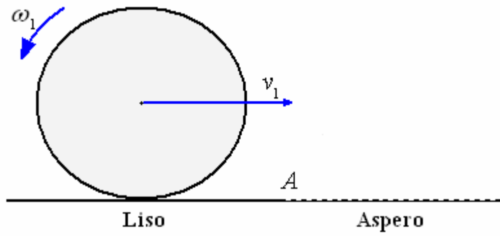
$TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha = \frac{1}{2}MRa$

De donde $Mg - \frac{1}{2}Ma = Ma$

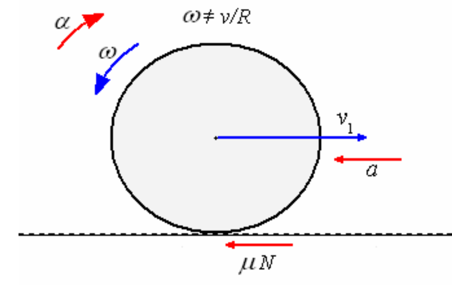
a) $a = \frac{2}{3}g$

b) $T = \frac{1}{2}Ma = \frac{1}{3}Mg$

Ejemplo 51. Se da a un cilindro homogéneo de radio *R* y masa *M* con una velocidad horizontal v_1 y una velocidad angular ω_1 en sentido opuesto a las agujas del reloj $\omega_1 = v_1/R$ en la parte sin rozamiento de la superficie horizontal. Más allá del punto A, cambia la superficie de manera que a la derecha de A el coeficiente de rozamiento es μ.



Solución.
En la parte lisa el cuerpo se mueve con velocidad horizontal constante v_1 hacia la derecha, rotando con velocidad angular ω_1 en el sentido antihorario.
A partir del punto A en que el piso es áspero deslizará primeramente sobre el plano áspero, pero acabará rodando sin deslizar.
En la parte intermedia habrá una aceleración a que disminuye a la velocidad de v_1 a v_2 y una aceleración angular α que disminuye a ω_1, la hace igual a cero y cambia su rotación hasta que llega la velocidad angular a un valor tal que $\omega_2 = v_2/R$.
Aplicando las leyes de Newton en la figura siguiente.



Traslación: $\mu N = Ma$, $N - Mg = 0$

Rotación: $-R\mu N = I_{CM}\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha$

De esto obtenemos: $a = -\mu g$, $\alpha = -\frac{2\mu g}{R}$

La velocidad es: $v = v_1 + at = v_1 - \mu gt$
La velocidad angular es:

$\omega = \omega_1 - \alpha\, t = \frac{v_1}{R} - \frac{2\mu g}{R}t$

Parta encontrar el tiempo en que el disco deja de resbalar, debe cumplirse: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$

$v\hat{i} = \omega\hat{k} \times R\hat{j} = -\omega R\hat{i}$

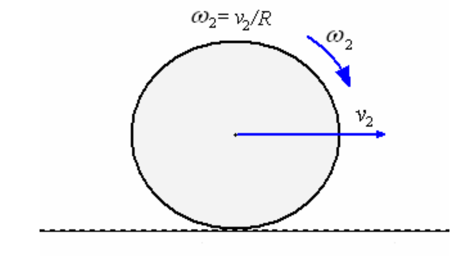
$(v_1 - \mu gt) = -\left(\frac{v_1}{R} - \frac{2\mu g}{R}t\right)R$

$2v_1 = 3\mu gt \Rightarrow t = \frac{2}{3}\frac{v_1}{\mu g}$

con este valor de t

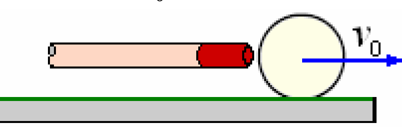
$v_2 = v_1 - \mu g\left(\frac{2}{3}\frac{v_1}{\mu g}\right) = \frac{v_1}{3}$

La velocidad final es un tercio de la inicial



Ejemplo 52. Se lanza una bola de billar con una velocidad inicial v_0 sobre una mesa horizontal,

existiendo entre la bola y la mesa un coeficiente de rozamiento μ. Calcular la distancia que recorrerá hasta que empiece a rodar sin deslizamiento.
¿Qué velocidad tendrá en ese instante?
Aplicar para el caso v_0 = 7 m/s, μ = 0,2.



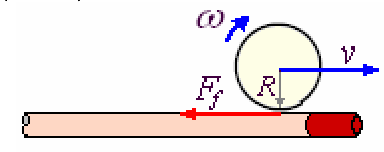
Solución.
La fuerza de rozamiento $\mu N = \mu mg$ se opone al movimiento, siendo además la fuerza resultante, por lo que:

$$-\mu mg = ma,\ a = -\mu g$$

La velocidad de la bola comenzará a disminuir de tal modo que:

$$v = v_0 - at = v_0 - \mu gt .$$

Al mismo tiempo, sobre la bola que inicialmente no rueda, ($\omega_0 = 0$) actúa un momento de fuerza:



$$\tau = F_f R = \mu mgR$$

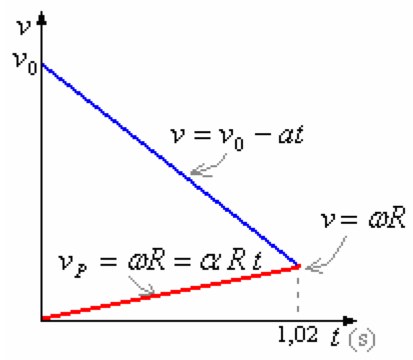
que producirá una aceleración angular $\alpha = \dfrac{\tau}{I}$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{\mu mgR}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{5\mu g}{2R}$$

Por lo que la velocidad angular irá aumentando:

$$\omega = \alpha t = \frac{5\mu gt}{2R}$$

La velocidad de un punto de la periferia de la esfera vale $v_P = \omega R$, que irá aumentando con el tiempo, porque ω aumenta con el tiempo.



Por tanto, observamos que la velocidad de la bola disminuye, y la velocidad de la periferia de la bola aumenta. En el momento en que la velocidad de la periferia se iguale a la velocidad de traslación, se conseguirá la rodadura, es decir el no deslizamiento.

$$v = v_P \quad v = \omega R$$

$$v_0 - \mu gt = \frac{5\mu gt}{2} \Rightarrow t = \frac{2v_0}{7\mu g}$$

la velocidad en ese instante es

$$v = \frac{5}{7}v_0 = 5 \text{ m/s},\ t = 1{,}02 \text{ s}$$

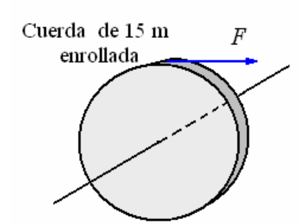
La distancia recorrida

$$x = v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2$$

$$= \frac{2v_0^2}{7\mu g} - \frac{1}{2}\mu g\left(\frac{2v_0}{7\mu g}\right)^2 = \frac{12v_0^2}{49\mu g}$$

= 6,12 m.

Ejemplo 53. Un tambor tiene un radio de 0,40 m y un momento de la inercia de 5,0 kg m^2. El torque producido por la fuerza de fricción de los cojinetes de anillo del tambor es 3,0 Nm. Un anillo en un extremo de una cuerda se desliza en una clavija corta en el borde del tambor, y una cuerda de 15 m de longitud se enrolla sobre el tambor. El tambor está inicialmente en reposo. Una fuerza constante se aplica al extremo libre de la cuerda hasta que la cuerda se desenrolla y se desliza totalmente de la clavija. En ese instante, la velocidad angular del tambor es de 12 rad/s. El tambor después decelera y se detiene.



a) ¿Cuál es la fuerza constante aplicada a la cuerda?
b) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del tambor en el instante en que la cuerda deja el tambor?
c) ¿Cuál es el trabajo negativo realizado por la fricción?
d) ¿Qué tiempo el tambor estuvo en movimiento?
Movimiento con la cuerda?
Solución.
a)
Trabajo de la fuerza F + trabajo de la fricción
= Energía cinética ganada al terminarse la cuerda

$$F\Delta s + \tau_f \Delta\theta = \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

$$\Rightarrow F(15) - 3{,}0\left(\frac{15}{0{,}4}\right) = \frac{1}{2}(5{,}0)(12)^2$$

$$\Rightarrow F = 31{,}5 \text{ N}$$

b)

$$L = I_O\omega = (5)(12)$$

= 60 kg.m^2/s
c)
Movimiento con la cuerda

$$W_{f1} = -\tau_f \Delta\theta = -3\left(\frac{15}{0,4}\right) = -112,5 \text{ J}$$

Movimiento sin la cuerda

$$W_{f2} = -\frac{1}{2} I_O \omega_O^2 = -\frac{1}{2}(5,0)(12)^2 = -360$$

Trabajo total

$$W_f = W_{f1} + W_{f2} = -482,5 J$$

d)

$$\sum \tau_O = I_O \alpha$$

$$FR - \tau_f I_O \alpha \Rightarrow 31,5(0,4) - 3,0 = 5,0\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{31,5(0,4) - 3,0}{5,0} = 1,92 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Por otra parte

$$\omega_o = \alpha_1 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_0}{\alpha_1} = \frac{12}{1,92} = 6,25 \text{ s}$$

Movimiento sin la cuerda

$$\sum \tau_O = I_O \alpha \Rightarrow -3 = 5\alpha_2$$

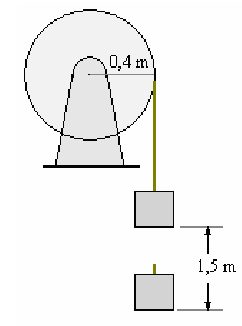
$$\Rightarrow \alpha_2 == -\frac{3}{5} = -0,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$0 = \omega_0 + \alpha_2 t_2$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{-\omega_0}{\alpha_2} = \frac{-12}{-0,6} = 20\text{s}$$

El tiempo total es 26,25 s

Ejemplo 54. Una rueda tiene un radio de 0,40 m y se monta en cojinetes sin fricción. Un bloque se suspende de una cuerda que se enrolla en la rueda. La rueda se libera de reposo y el bloque desciende 1,5 m en 2,00 segundos. La tensión en la cuerda durante el descenso del bloque es 20 N.
a) ¿Cuál es la masa del bloque?
b) ¿Cuál es el momento de inercia de la rueda?



Solución.

a)

$$h = \frac{1}{2} a t^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2(1,5)}{(2)^2}$$

$$= 0,75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$mg - T = ma$$

$$\Rightarrow m = \frac{T}{g - a} = \frac{20}{9,8 - 0,75}$$

$$= 2,21 \text{ kg}$$

b)

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{0,75}{0,4}$$

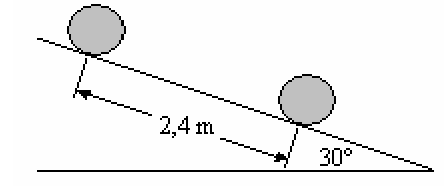
$$= 1,875 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\sum \tau_O = I_O \alpha \Rightarrow TR = I_O \alpha$$

$$\Rightarrow I_O = \frac{TR}{\alpha} = \frac{20(0,4)}{1,875}$$

$$= 4,27 \text{ kg m}^2$$

Ejemplo 55. El radio de una rueda de 3,0 kilogramos es 6,0 centímetros. La rueda se suelta del reposo en el punto A en un plano inclinado 30°. La rueda gira sin deslizar y se mueve 2,4 m al punto B en 1,20s.
a) ¿Cuál es el momento de inercia de la rueda?
b) ¿Cuál es la aceleración angular de la rueda?



Solución.

a) $I_O = \frac{1}{2} mR^2 = \frac{1}{2}(3\text{kg})(0,06\text{m})^2$

$$= 0,0054 \text{ kg m}^2$$

b)

$$mg\text{sen}30° - F_f = ma \quad F_f R = I_O \alpha$$

$$\Rightarrow F_f = \left(\frac{I_O}{R}\right)\alpha$$

$$mg\text{sen}30° - \left(\frac{I_O}{R}\right)\alpha = mR\alpha$$

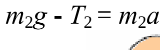
$$\Rightarrow \alpha = \frac{mg\text{sen}30°}{\left(\frac{I_O}{R}\right) + mR} = \frac{3(9,8)(0,5)}{\frac{0,0054}{0,06} + 3(0,06)}$$

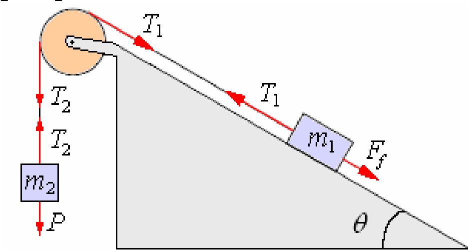
$$= \frac{14,7}{0,27} = 54,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Ejemplo 56. Una masa de 20 kg se halla sobre un plano inclinado 30º, con el que tiene un rozamiento cuyo coeficiente vale 0,3, unida a una cuerda sin masa e inextensible que pasa por una polea de M_P = 160 kg, cuyo radio geométrico es de 20 cm y radio

de giro r_g = 15 cm. De dicha cuerda pende una masa de 40 kg que es abandonada libremente.
Calcular:
a) Aceleración con que se mueve el sistema.
b) Tensiones en la cuerda.
c) ¿En qué rango de valores de la masa que pende, el sistema estará en equilibrio?
Momento de inercia de la polea $I_P = Mr_g^2$.

Solución.
a) Partiendo de la suposición de que la masa colgante acelera hacia abajo, plantearemos las tres ecuaciones correspondientes al movimiento de las tres masas:


m_2g - T_2 = m_2a



$$T_1 - m_1 g\text{sen}\theta + \mu m_1 g\cos\theta = m_1 a,$$

$$T_2 R - T_1 R = I\alpha = M_P r_g^2 \frac{a}{R}$$

Sumando las tres ecuaciones siguientes

$$m_0 g - T_2 = m_2 a,$$

$$T_1 - m_1 g\text{sen}\theta + \mu m_1 g\cos\theta = m_1 a$$

$$T_2 - T_1 M_P \left(\frac{r_g}{R}\right)^2 a$$

Obtenemos:

$$m_2 g - m_1 g\text{sen}\theta + \mu m_1 g\cos\theta$$

$$= a\left[m_1 + m_2 + M_P\left(\frac{r_g}{R}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1\text{sen}\theta + \mu m_1\cos\theta}{m_1 + m_2 + M_P\left(\frac{r_g}{R}\right)^2} g$$

$$= \frac{40 - 10 - 5{,}2}{60 + 160\left(\frac{15}{20}\right)^2} g$$

= 1,62 m/s^2

b)

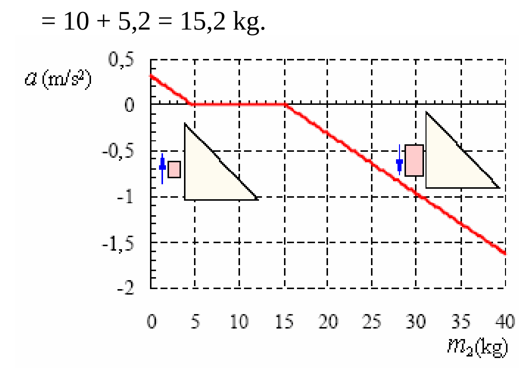
$$T_2 = m_2(g - a) = 327 \text{ N},$$

$$T_1 = T_2\left(\frac{r_g}{R}\right)^2 a = 181 \text{ N}.$$

c) El valor mínimo que hace que la masa m_2 acelere hacia abajo se produce cuando a = 0, es decir:

$$m_2 = m_1\text{sen}\theta + \mu m_1\cos\theta$$

= 10 + 5,2 = 15,2 kg.



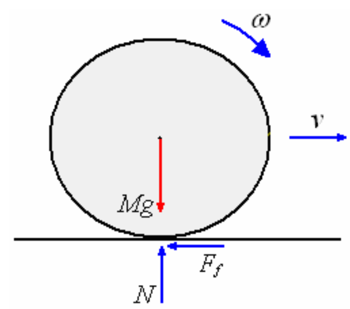
Si la masa m_2 se hace aún menor, llegará un momento en que será arrastrada por m_1. Esto produciría una inversión en el sentido de la fuerza de rozamiento. El valor máximo de m_2 deberá cumplir ahora:

$$m_2 = m_1\text{sen}\theta + \mu m_1\cos\theta$$

= 10 – 5,2 = 4,8 kg.

Por tanto, entre 0 y 4,8 kg el sistema acelerará de modo que m_2 suba; entre 4,8 y 15,2 kg, permanecerá en equilibrio; y para más de 15,2 kg m_2 acelerará hacia abajo.

Ejemplo 57. ¿Porqué una esfera que rueda se detiene? En esta parte vamos a tratar de explicar la resistencia al rodamiento.
La figura siguiente muestra una esfera de masa M y radio R la cual está rodando con una velocidad angular ω y avanza con una velocidad $v = \omega R$.



Solución.
La fuerzas que actúan sobre la esfera son el peso Mg 1a reacción del piso N y la fuerza de fricción F_f. Si aplicamos la segunda ley de Newton a la traslación.

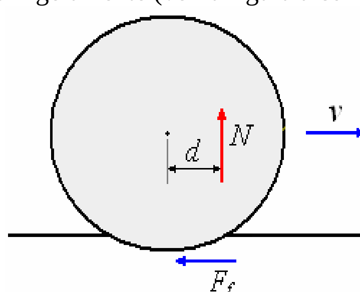
$$\vec{F_f} = M\vec{g}$$

debe haber una aceleración $\vec{a}$ y $\vec{v}$ decrecería. Si aplicamos segunda ley de Newton a la rotación.

$$RF_f = I_{CM}\alpha$$

la aceleración angular α depende de F_f, por consiguiente F_f actúa incrementando ω.
En resumen: en traslación F_f, acelera, en rotación F_f, desacelera, esto aparentemente es una contradicción.
Por otra parte Mg y N están en la línea vertical que por el centro de masa y no causan efecto en el

movimiento horizontal.
Si la esfera y el plano son rígidos, de modo que la esfera esté en contacto solo en un punto, tampoco originan alrededor del centro de masa. .porque actúan a través de él
Para resolver la Contradicción suprimamos la idealización de que todos los cuerpos son rígidos, la esfera se aplana un poco y el nivel de La superficie se hunde Ligeramente (ver la figura a continuación)



La reacción N actúa delante del centro de masa, produciendo un torque $\tau_N = dN$ de resistencia al rodamiento.

$$\tau_N - RF_f = I_{CM}\alpha$$

Como $N = Mg$, $F_f = Ma$, $\alpha = \frac{a}{R}$:

$$\tau_N - RMa = I_{CM}\frac{a}{R}$$

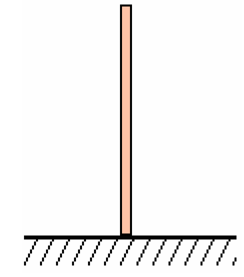
$$\Rightarrow \tau_N = a\left(\frac{I_{CM}}{R} + RM\right)$$

Para una esfera: $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$

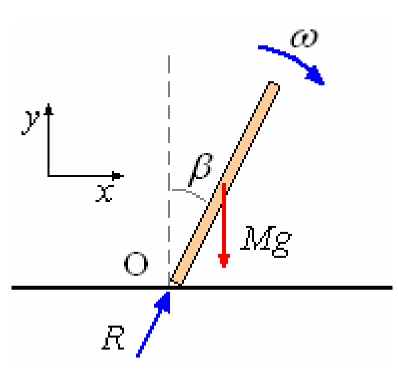
Luego: $\tau_N = \frac{7}{5}MRa$, como $N = Mg$

$$d = \frac{\tau_N}{Mg} = \frac{7R}{5g}a$$

Ejemplo 58. La figura muestra una varilla homogénea de masa M y longitud L en posición vertical. La cual se deja caer desde el reposo.
a) ¿A que ángulo θ entre la varilla y la vertical, la varilla ya no presionará al piso?
b) ¿Con qué coeficiente de fricción el extremo de La varilla no resbalará hasta este momento?



Solución.
a) La figura siguiente muestra .la varilla cuando forma un ángulo θ con la vertical.



Sobre la varilla actúa el peso Mg y la reacción R.
La velocidad angular ω en este instante se puede encontrar aplicando la ecuación de la energía.

$$Mg\frac{L}{2} = Mg\frac{L}{2}\cos\beta + \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

Como $I_O = \frac{1}{3}ML^2$

$$Mg\frac{L}{2} = Mg\frac{L}{2}\cos\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{L}(1-\cos\beta)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{L}}\text{sen}\frac{\beta}{2} = \frac{3g}{L}\left(2\text{sen}^2\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{6g}{L}\text{sen}^2\frac{\beta}{2}$$

Aplicando la segunda Ley de Newton para traslación a lo largo de la varilla.

$$\sum F = ma_c \Rightarrow R - Mg\cos\beta = -M\omega^2\frac{L}{2}$$

Cuando La varilla deja de presionar R = 0, y:

$$-Mg\cos\beta = -M\omega^2\frac{L}{2}$$

reemplazando el valor de ω^2 encontrado

$$Mg\cos\beta = M\left(\frac{6g}{L}\text{sen}^2\frac{\beta}{2}\right)\frac{L}{2}$$

Simplificando

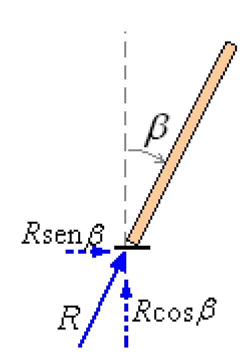
$$\cos\beta = 6\,\text{sen}^2\frac{\beta}{2} \Rightarrow \cos^2\frac{\beta}{2} = 5\,\text{sen}^2\frac{\beta}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

De aquí: $\beta = 48{,}2^\circ$

b) Para que la varilla no resbale tenemos en la figura siguiente.
Las componentes de R son:

$$\vec{R} = R\text{sen}\beta\,\hat{i} + R\cos\beta\hat{j}$$



La condición para que la varilla no resbale es:

$F_f \geq R\text{sen}\beta$

Con $F_f = \mu N$ y $N = R\cos\beta$

$\mu R\cos\beta \geq R\text{sen}\beta$

$\mu \geq \tan\beta$

El coeficiente de rozamiento del piso debe ser cuando menos igual a $\tan\beta$ para que llegue sin deslizar hasta el ángulo β.

Para $\beta = 48{,}2^\circ \Rightarrow \mu \geq 1{,}12$

CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR.

Anteriormente hemos visto que:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ y también } \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

y mostramos que para un cuerpo rígido.

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}_{total}}{dt}$$

Si no hay torque externo con respecto a algún eje la cantidad de movimiento angular será constante con respecto a ese eje.

$$\vec{L}_{\text{total}} = \text{Constante}$$

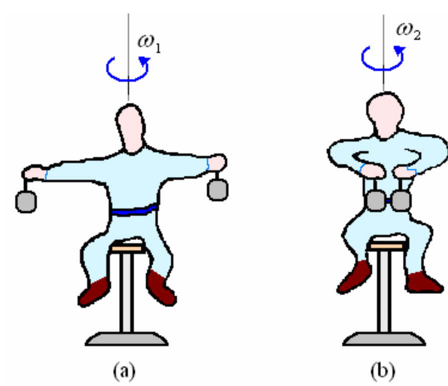
o expresado en función del momento de inercia apropiado.

$$I\vec{\omega} = \text{Constante}$$

Esta relación nos va a ser muy útil como veremos a continuación.

Ejemplo 59. Un estudiante está sentado sobre un banco giratorio montado sobre cojinetes sin fricción que puede girar libremente alrededor de un eje vertical como se muestra en la figura (a). El estudiante sostiene en las manos extendidas dos pesas. Su momento de inercia en esta posición es I_1 y su velocidad angular ω_1. No actúan sobre él torques no equilibrados y en consecuencia su cantidad de movimiento angular tiene que conservarse.

Cuando el estudiante acerca las manos al cuerpo, su momento de inercia varía, figura (b) ahora es I_2 y su velocidad angular será ω_2



Por la conservación de la cantidad de movimiento angular.

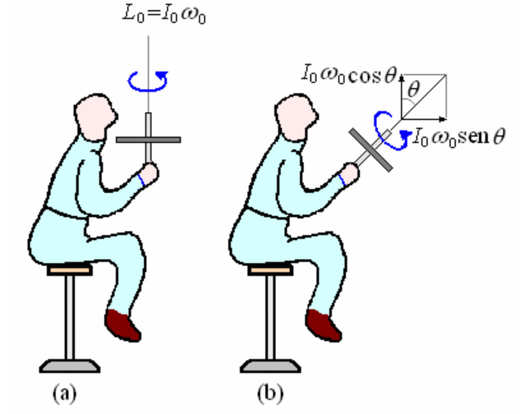
$$I_2\omega_2 = I_1\omega_1 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1$$

Siendo $I_2 < I_1$, resulta $\omega_2 > \omega_1$

Su velocidad aumenta.

Ejemplo 60. Esta vez el mismo estudiante sentado sobre el mismo banco, sostiene en sus manos en posición vertical al eje de rotación de una rueda de bicicleta, la rueda gira alrededor de ese eje vertical con velocidad angular ω_0, el estudiante y el banco están en reposo (a).

El estudiante gira el eje de la rueda en ángulo θ con la vertical (b), como no hay torque respecto al eje vertical, la cantidad de movimiento angular con respecto al eje vertical debe conservarse.



Inicialmente se tiene

$$\vec{L} = I_0\omega_0\hat{k}$$

Cuando se inclina la rueda (respecto al eje vertical)

$$\vec{L}' = \vec{L}_{estudiante+banco} + \vec{L}_{rueda}$$

$$= I_e\vec{\omega}_e + I_0\omega_0\cos\theta\,\hat{k}$$

Siendo I_e el momento de inercia del estudiante y banco respecto al eje vertical, ω_e su velocidad angular con respecto a ese eje.

Como $\vec{L} = \vec{L}'$

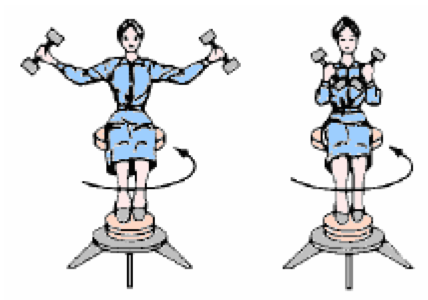
$$I_e\vec{\omega}_e + I_0\omega_0\cos\theta\,\hat{k} = I_0\omega_0\hat{k}$$

$$\vec{\omega}_e = \frac{I_0}{I_e}\omega_0(1-\cos\theta)\hat{k}$$

Es la velocidad angular del estudiante con el sentido de giro inicial de la rueda.
Cuando la rueda se invierte se invierte totalmente $\theta = \pi/2$, y:

$$\vec{\omega}_e = \frac{2I_0}{I_e}\omega_0\,\hat{k}$$

Ejemplo 61. Una persona está sentada en una silla giratoria manteniendo los brazos extendidos con una pesa en cada mano. Gira con una frecuencia de 2 Hz. El momento de inercia de la persona con los pesos es de 5 kg m^{2}. Hallar:
a) la nueva frecuencia cuando encoja los brazos y disminuya el momento de inercia a 2 kg m^2.
b) La variación de energía cinética del sistema.
c) ¿De dónde procede este incremento de energía cinética?



Solución.
a) Al encoger los brazos, están actuando fuerzas y torques de fuerzas internas, por lo que podemos admitir que se conserva la cantidad de movimiento angular.

$$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_2, \Rightarrow\ 2\pi\, f_2 = \frac{I_1}{I_2}2\pi\, f_1,$$

$$\Rightarrow f_2 = \frac{I_1}{I_2}f_1 = \frac{5}{2}2 = 5\ \text{Hz}$$

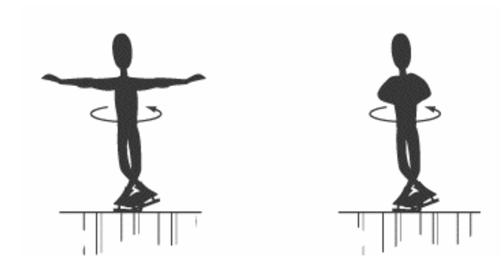
b) $$\Delta K = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = \frac{L^2}{2I_2} - \frac{L^2}{2I_1}$$

$$L = I_1\omega_1 = 5(2\pi 2) = 20\pi\,\text{kg m}^2\text{s};$$

$$\Delta K = 200\pi^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right) = 60\pi^2\ \text{J}.$$

El signo positivo nos indica que hay un aumento de energía cinética.
c) Este incremento de energía cinética procede de la energía química almacenada en los músculos del brazo.

Ejemplo 62. Un patinador, con los brazos extendidos y las piernas abiertas y con un momento de inercia respecto a su eje vertical de 7 kg.m^2, inicia un giro sobre si mismo con una aceleración de 2 rad/s^2 durante 6 segundos, momento en el cual encoge los brazos y acerca sus piernas al eje hasta tener un momento de inercia de 4 kg.m^2.
Determinar su velocidad de giro final.



Solución.

Después de un tiempo t de iniciar el giro, su velocidad angular será:

$$\omega_{(t)} = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(2)(6)^2 = 36\ \text{rad/s}$$

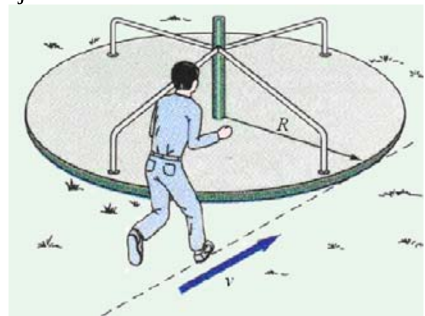
al acercar brazos y piernas al eje, el torque de las fuerzas sigue siendo nulo, por lo que se conserva la cantidad de movimiento angular, $I\omega$

$$(I\omega)_{\text{Antes}} = (I\omega)_{\text{Después}} \Rightarrow$$

$$\omega_{\text{Después}} = \frac{I_{\text{Antes}}}{I_{\text{Después}}}\omega_{\text{Antes}}$$

$$= \frac{7}{4}36 = 63\ \text{rad/s}$$

Ejemplo 63. Un muchacho de 25 kg corre con velocidad de 2,5 m/s hacia un tiovivo en reposo de radio 2 m cuyo, momento de inercia vale 500 kg m^2. Hallar la velocidad angular y frecuencia del conjunto después de que el muchacho suba al tiovivo justo en el borde.



Solución.
La cantidad de movimiento angular del muchacho respecto al centro del tiovivo es:

$$L_1 = mvR = (25)(2,5)(2) = 125\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

El momento de inercia del conjunto tiovivo-muchacho es

$I = I_m + I_T = 25x2^2 + 500$

$= 600$ kg m^2

Planteando la igualdad entre la cantidad de movimiento angular inicial y final, tendremos:

$$L_1 = L_2,\ mvR = (I_m + I_T)\omega$$

$$\omega = \frac{mvR}{(I_m + I_T)} = \frac{125}{600}$$

$= 0{,}208$ rad/s

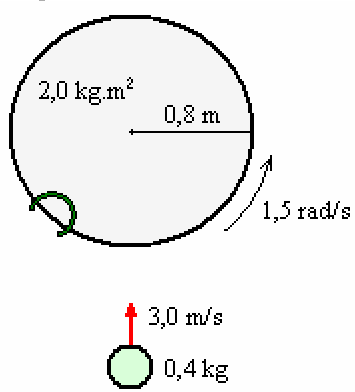
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0{,}033 \text{ Hz}$$

$= 1{,}99$ r.p.m.

Ejemplo 64. Una tornamesa con radio de 8,0 m y momento de inercia de 2,0 kg.m^2. La placa tornamesa rota con una velocidad angular de 1,5 rad/s sobre un eje vertical que pasa a través de su centro en cojinetes sin fricción. Una bola de 0,40 kg se lanza horizontalmente hacia el eje de la tornamesa con una velocidad de 3,0 m/s. La bola es cogida por un mecanismo con forma de tazón en el borde de la tornamesa.

a) ¿Cuál es cantidad de movimiento angular de la bola alrededor del eje de la tornamesa?

b) ¿Qué fracción de energía cinética se pierde durante la captura de la bola?



Solución.

a) La cantidad de movimiento angular de la bola alrededor del eje de la tornamesa es cero

b)

Energía antes $= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2$

$$= \frac{1}{2}(0{,}4)(3{,}0)^2 + \frac{1}{2}(2{,}0)(1{,}5)^2$$

$= 4{,}05$ J

Energía después $= \frac{1}{2}I'_O\,\omega'^2$

Para calcular esta energía necesitamos conocer I_0 y ω'.

$$I'_O = I_O + mR^2 = 2{,}0 + (0{,}4)(0{,}8)^2$$

$= 2{,}256$ kg/ m^2

$$L_{antes} = L_{después} \Rightarrow I_O\omega = I'_O\,\omega'$$

$$\omega' = \left(\frac{I_O}{I'_O}\right)\omega = \left(\frac{2{,}0}{2{,}256}\right)1{,}5$$

$$= 1{,}33\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Reemplazando:

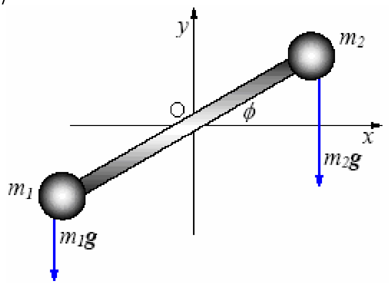
Energía después $= \frac{1}{2}I'_O\,\omega'^2 = \frac{1}{2}(2{,}256)(1{,}33)^2$

$= 2$ J

Se pierde 4,05 -2 = 2,05

$$\text{fracción de energía} = \frac{2{,}05}{4{,}05} = 0{,}5$$

Ejemplo 65. Una barra rígida de masa M y largo L gira en un plano vertical alrededor de un eje sin fricción que pasa por su centro. En los extremos de la barra se unen dos cuerpos de masas m_1 y m_2. Calcular la magnitud del momento angular del sistema cuando su rapidez angular es ω y la aceleración angular cuando la barra forma un ángulo ϕ con la horizontal.



Solución.

El momento de inercia por el eje de rotación del sistema es igual a la suma de los momentos de inercia de los tres componentes, con los valores de la tabla se obtiene:

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$= \frac{L^2}{4}\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{3}\right)$$

Como el sistema gira con rapidez angular ω, la magnitud del momento angular es:

$$L = I\omega = \frac{L^2}{4}\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{3}\right)\omega$$

Para calcular la aceleración angular usamos la relación

$\tau_t = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\tau_t}{I}$, al calcular el torque total en torno el eje de rotación, se obtiene:

$$\tau_t = m_1 g\frac{L}{2}\cos\phi - m_2 g\frac{L}{2}\cos\phi$$

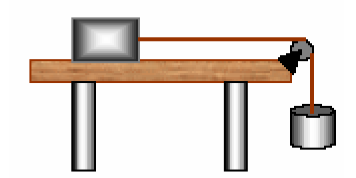
$$= \frac{1}{2}(m_1 - m_2)gL\cos\phi$$

Reemplazando en α los valores de I y de τ_t, se obtiene la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\tau_t}{I} = \frac{2(m_1 - m_2)g\cos\phi}{L(m_1 + m_2 + M/3)}$$

Ejemplo 66. En la figura las masas m_1 y m_2 se conectan por una cuerda ideal que pasa por una polea de radio R y momento de inercia I alrededor de su eje. La mesa no tiene roce, calcular la aceleración del sistema.

Solución. Primero se calcula en momento angular del sistema de las dos masas más la polea:



$$L = m_1 vR + m_2 vR + I\frac{v}{R}$$

Luego se calcula el torque externo sobre el sistema, la única fuerza externa que contribuye al torque total es m_1g, entonces el torque es

$\tau = m_1 gR$.

Entonces se tiene:

$$\tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow$$

$$m_1 gR = \frac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2)vR + I\frac{v}{R}\right]$$

$$m_1 gR = (m_1 + m_2)R\frac{dv}{dt} + \frac{I}{R}\frac{dv}{dt}$$

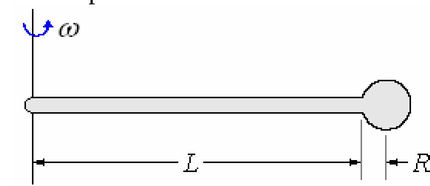
$$\Rightarrow m_1 gR = \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)Ra$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}$$

Ejemplo 67. Una varilla de 500 g y 75 cm de longitud, lleva soldada en un extremo una esfera de 10 cm de radio y 250 g de masa. Calcular:

a) El momento de inercia cuando gira, alrededor de un eje perpendicular a la varilla que pasa por el extremo libre.

b) La cantidad de movimiento angular del conjunto si gira a 12 rpm.



Solución.

a) El momento de inercia será la suma del momento de inercia de una varilla, más el de la esfera. Como la esfera está a $L+R$ del eje, aplicamos Steiner:

$$I_e = \frac{2}{5}m_e R^2 + m_e(L+R)^2,\ I_V = \frac{1}{3}m_V L^2$$

$$I = I_e + I_V$$

$$= \frac{2}{5}m_e R^2 + m_e(L+R)^2 + \frac{1}{3}m_V L^2$$

$$I = \frac{2}{5}(0{,}25)(0{,}1)^2 + (0{,}25)(0{,}85)^2 + \frac{1}{3}(0{,}5)(0{,}75)^2$$

$= 0{,}27$ kg.m^2

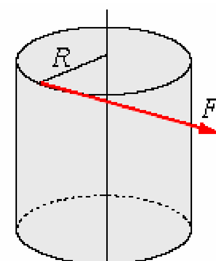
b) $L = I\omega = 0{,}27\frac{2\pi}{T} = 0{,}27(2\pi f)$

$= 0{,}54\pi\frac{12}{60} = 0{,}345$ kgm^2 / s

Ejemplo 68. Un cilindro de 50 kg y 20 cm de radio, gira respecto de un eje vertical que coincide con su eje de simetría, debido a una fuerza constante, aplicada a su periferia que, después de 40 s de iniciado el movimiento, alcanza 200 r.p.m.

Calcular:

El valor de la fuerza y el torque de la fuerza aplicada.



Solución.

La frecuencia de rotación adquirida vale:

$$f = \frac{200}{60}\text{ Hz}$$

La velocidad angular:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\frac{200}{60} = \frac{20}{3}\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\pi}{6}\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Por otra parte el momento de inercia del cilindro vale:

$I = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}(50)(0{,}2)^2 = 1$ kgm^2.

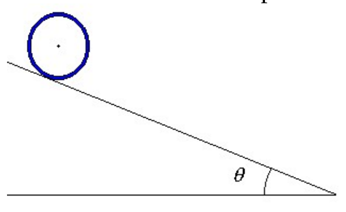
Luego el torque de la fuerza aplicada

$\tau = FR = I\alpha = (1)\frac{\pi}{6} = 0{,}52$ Nm.

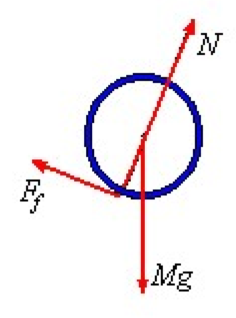
La fuerza tangencial:

$F = \frac{\tau}{R} = \frac{0{,}52}{0{,}2} = 2{,}6$ N

Ejemplo 69. Un anillo de masa M y radio R ($I_{CM} = MR^2$), cae en rodadura pura sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal.
a) Hacer el DCL. del anillo.
b) Hallar la aceleración del centro de masa del anillo.
c) Encontrar el valor de la fricción entre el plano inclinado y el anillo.
d) ¿Cuál debe ser el mínimo valor del coeficiente de rozamiento estático entre el plano y el anillo para que este se encuentre en rodadura pura?



Solución.
a) El DCL. del anillo.

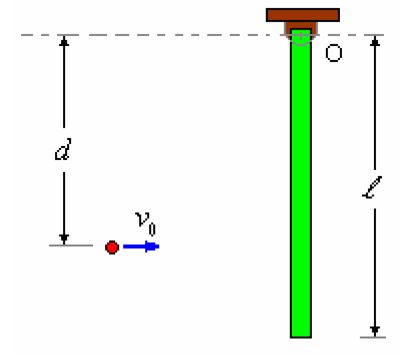


b) Segunda ley de Newton para la traslación
$$Mg\text{sen}\theta - F_f = Ma$$
Segunda ley de Newton para la rotación
$$I\alpha = F_f R \Rightarrow MR^2 \frac{a}{R} = F_f R \Rightarrow$$
$$F_f = Ma$$
Reemplazando el valor de F_f en la primera ecuación.
$$Mg\text{sen}\theta - Ma = Ma \Rightarrow Mg\text{sen}\theta = 2Ma$$
Finalmente $a = \frac{1}{2} g\text{sen}\theta$

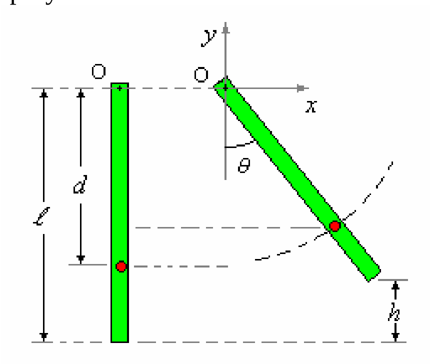
c) El valor de la fuerza de fricción entre el plano inclinado y el anillo.
$$F_f = Ma = \frac{1}{2} Mg\text{sen}\theta$$
d) El mínimo valor del coeficiente de rozamiento estático entre el plano y el anillo para que este se encuentre en rodadura pura debe de cumplir
$$F_f = \mu_k N = \frac{1}{2} Mg\text{sen}\theta$$
$$\Rightarrow \mu_k = \frac{Mg\text{sen}\theta}{2Mg\cos\theta} = \frac{1}{2}\tan\theta$$

Ejemplo 70. Una barra uniforme AB de masa M y longitud ℓ $\left(I_{CM} = \frac{1}{12} M\ell^2\right)$ se sostiene de un extremo mediante un pivote sin fricción. La barra se encuentra inicialmente en reposo en forma vertical cuando un proyectil de masa m impacta sobre ella y queda incrustado instantáneamente. La velocidad inicial del proyectil es v_0. Hallar:
a) La cantidad de movimiento angular del sistema respecto del pivote justo antes de la colisión.

b) La velocidad angular de giro del sistema después que el proyectil se incrusta en la barra.
c) La altura máxima que alcanzará el CM de la barra.
d) El trabajo del proyectil cuando se incrusta contra la barra.



Solución.
a) La cantidad de movimiento angular del sistema respecto del pivote justo antes de la colisión.
$$L_{antes} = mv_0 d$$
b) La velocidad angular de giro del sistema después que el proyectil se incrusta en la barra.



$$L_{antes} = L_{después}$$
$$mv_0 d = \frac{1}{3} M\ell^2 \omega + (\omega d) d$$
$$\Rightarrow \omega = \frac{mv_0 d}{\left(\frac{1}{3} M\ell^2 + md^2\right)}$$
c) La altura máxima que alcanzará el CM de la barra.
Energía justo después del choque

$$= \frac{1}{2} I_O \omega^2 - \left(Mg\frac{\ell}{2} + mgd \right)$$

$$= I_O = \left(\frac{1}{3} M\ell^2 + md^2 \right)$$

Energía cuando alcanza el punto más alto

$$= -\left(Mg\frac{\ell}{2} + mgd \right)(1 - \cos\theta)$$

Por conservación de energía:
Energía justo después del choque = energía cuando alcanza el punto más alto.

$$\frac{1}{2} I_O \omega^2 - \left(Mg\frac{\ell}{2} + mgd \right) = -\left(Mg\frac{\ell}{2} + mgd \right)(1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \left(Mg\frac{\ell}{2} + mgd \right)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\frac{1}{2} I_O \omega^2}{\left(Mg\frac{\ell}{2} + mgd \right)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} M\ell^2 + md^2 \right)\frac{(mv_0 d)^2}{\left(\frac{1}{3} M\ell^2 + md^2 \right)^2}}{\left(Mg\frac{\ell}{2} + mgd \right)}$$

$$= \frac{m^2 v_0^2 d^2}{2\left(M\frac{\ell}{2} + md \right)\left(\frac{1}{3} M\ell^2 + md^2 \right) g}$$

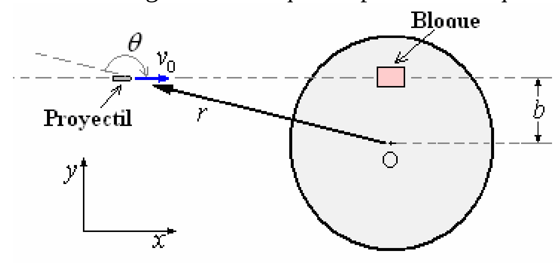
$$\Rightarrow h_{máx} = \ell(1 - \cos\theta)$$

d) El trabajo del proyectil cuando se incrusta contra la barra.

$$W = \Delta E = \left(\frac{1}{2} mv_0^2 - Mg\frac{\ell}{2} - mgd \right) - \left[\frac{1}{2} I_O \omega^2 + \left(-Mg\frac{\ell}{2} - mgd \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{1}{2} I_O \omega^2$$

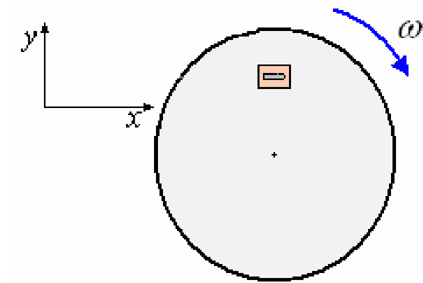
Ejemplo 71. Un bloque de masa *M* se pega a una plataforma circular, a una distancia *b* de su centro. La plataforma puede rotar, sin fricción, alrededor de un eje vertical alrededor de su centro. Siendo I_p su momento de inercia con respecto a ésta. Si un proyectil de masa *m* que se mueve con una velocidad horizontal v_0, como se muestra en la figura, incide y queda en el bloque. Encontrar la velocidad angular del bloque después del choque.



Solución.
Cantidad de movimiento angular antes del choque con respecto al eje O.

$$\vec{L}_{antes} = \vec{r} \times \vec{p} = -rmv_0 \text{sen}\theta\, \hat{k} = -mbv_0 \hat{k}$$

Para encontrar la cantidad de movimiento angular después del choque, según la figura siguiente.



$$\vec{L}_{después} = \left[I_p + (m + M)b^2 \right]\vec{\omega}$$

Por conservación de la cantidad de movimiento angular

$$\vec{L}_{antes} = \vec{L}_{después}$$

$$\Rightarrow -rmv_0 \text{sen}\theta\, \hat{k} = \left[I_p + (m + M)b^2 \right]\vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = -\frac{rmv_0 \text{sen}\theta}{\left[I_p + (m + M)b^2 \right]}\hat{k}$$

Ejemplo 72. Se tiene una plataforma circular que puede rotar sin fricción alrededor de un eje perpendicular al centro. E1 momento de inercia de la plataforma con respecto al eje es I_p. Un insecto de masa *m* se coloca sobre la plataforma a una distancia *b* del eje. El sistema se hace girar con una velocidad angular ω_0 en el sentido horario. El insecto empieza a correr en una circunferencia de radio *b* alrededor del eje con una velocidad de magnitud constante v_0, medida relativa a tierra.
a) ¿Cual es la cantidad de movimiento angular total si el insecto corre con la plataforma?
b) ¿Cuál será si corre en oposición a la rotación de la plataforma?
c) ¿Es posible que el pequeño insecto pueda detener la gran plataforma? ¿Cómo?

Solución.
La cantidad de movimiento angular del sistema antes que el insecto comience a correr es:

$\vec{L} = \left(I_p + mb^2\right)\vec{\omega}_0 = -\left(I_p + mb^2\right)\omega_0 \hat{k}$

a) Cuando el insecto corre en el mismo sentido del giro con módulo de velocidad v_0 su cantidad de movimiento angular es:

$\vec{L}' = \left(I_p + mb^2\right)\vec{\omega}' - mbv_o \hat{k}$

Pero como la cantidad de movimiento angular es constante. La cantidad de movimiento angular total es:

$\vec{L}' = \vec{L} = -\left(I_p + mb^2\right)\omega_0 \hat{k}$

b) En este caso, como en el caso anterior

$\vec{L}' = \vec{L}$

$\overleftarrow{L}' = -\left(I_p + mb^2\right)\omega_0 \hat{k}$

c) Si es posible, tomando el caso a)

$\vec{L}' = \left(I_p + mb^2\right)\vec{\omega}' - mbv_o \hat{k}$

$= -\left(I_p + mb^2\right)\omega_0 \hat{k}$

La plataforma se detiene cuando $\omega' = 0$, es decir:

$-mbv_0 \hat{k} = -\left(I_p + mb^2\right)\omega_0 \hat{k}$

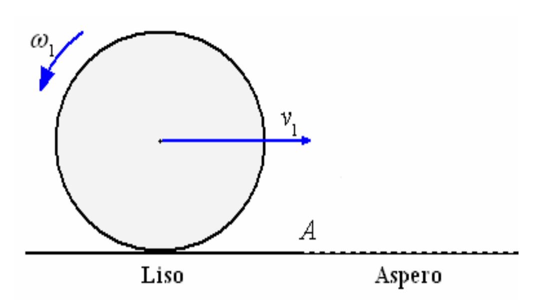
Esto sucede cuando

$v_0 = \dfrac{\left(I_p + mb^2\right)}{mb}\omega_0$

En el sentido indicado en el caso a).

Ejemplo 73. Se da a un cilindro homogéneo de radio R y masa M con una velocidad horizontal v_1 y una velocidad angular ω_1 en sentido opuesto a las agujas del reloj $\omega_1 = v_1/R$ en la parte sin rozamiento de la superficie horizontal. Más allá del punto A, cambia la superficie de manera que a la derecha de A el coeficiente de rozamiento es μ.

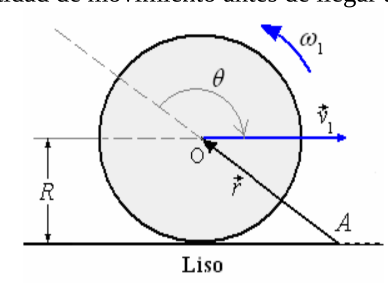
Resolver usando la conservación de la cantidad de movimiento angular.



Solución.

En la parte lisa no hay fuerza de fricción, en la parte áspera aparece la tuerza de fricción, cuya línea de acción está en el plano. Por tanto, la cantidad de movimiento angular del disco respecto a un punto de referencia en el plano permanecerá Constante durante todo el movimiento (por ejemplo A).

La cantidad de movimiento antes de llegar a A.



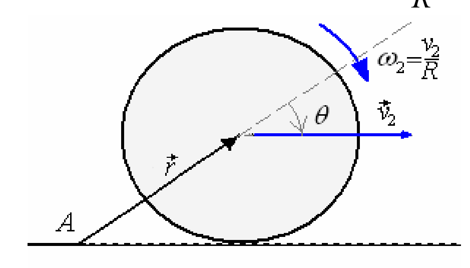
$\vec{L} = \vec{r} \times M\vec{v}_1 = I_0\vec{\omega}_1$

Como $\vec{r} \times \vec{v}_1 = -rv_1 \operatorname{sen}\theta \hat{k} = -Rv_1\hat{k}$,

$I_0 = \frac{1}{2}MR^2$, $\vec{\omega}_1 = \omega_1\hat{k} = \frac{v_1}{R}\hat{k}$

$\vec{L} = -MRv_1\hat{k} + \frac{1}{2}MRv_1\hat{k} = -\frac{1}{2}MRv_1\hat{k}$

La cantidad de movimiento angular después de pasar A y haber 1legado a rodar sin deslizar. Se traslada con velocidad v_2 tal que $\omega_2 = \dfrac{v_2}{R}$.



$\vec{L}' = \vec{r} \times M\vec{v}_2 = I_0\vec{\omega}_2$

Como $\vec{r} \times \vec{v}_2 = -rv_2 \operatorname{sen}\theta \hat{k} = -Rv_2\hat{k}$,

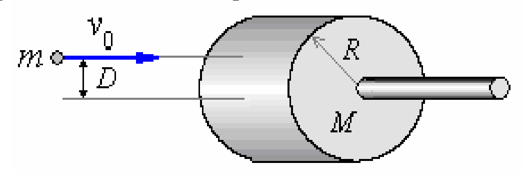
$I_0 = \frac{1}{2}MR^2$, $\vec{\omega}_2 = -\omega_2\hat{k} = \frac{v_2}{R}\hat{k}$

$\vec{L}' = -MRv_2\hat{k} - \frac{1}{2}MRv_2\hat{k} = -\frac{3}{2}MRv_2\hat{k}$

Igualando $\vec{L}' = \vec{L}$, tenemos:

$$-\frac{3}{2}MRv_2\hat{k} = -\frac{1}{2}MRv_1\hat{k} \Rightarrow v_2 = \frac{v_1}{3}$$

Ejemplo 74. Un proyectil de masa *m* y velocidad v_0 se dispara contra un cilindro sólido de masa *M* y radio *R*. El cilindro está inicialmente en reposo montado sobre un eje horizontal fijo que pasa por su centro de masa. El proyectil se mueve perpendicular al eje y se encuentra a una distancia *D* < *R* sobre el eje. Calcular la rapidez angular del sistema después que el proyectil golpea al cilindro y queda adherido a su superficie.



Solución.
El momento angular del sistema se conserva, entonces

$$L_i = L_f$$

$$mv_0 D = I\omega = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{mv_0 D}{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}$$

Ejemplo 75. Un disco de masa *M* y radio *R* gira en un plano horizontal en torno a un eje vertical sin roce. Un gato de masa *m* camina desde el borde del disco hacia el centro. Si la rapidez angular del sistema es ω_0 cuando el gato está en el borde del disco, calcular:
a) la rapidez angular cuando el gato ha llegado a un punto a *R*/4 del centro,
b) la energía rotacional inicial y final del sistema.
Solución.
Llamando I_d al momento de inercia del disco e I_g al momento de inercia del gato, el momento de inercia total inicial y final del sistema es:

$$I_i = I_d + I_g = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2$$

$$I_f = \frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{R}{4}\right)^2$$

a) Como no hay torques externos sobre el sistema en torno al eje de rotación, se puede aplicar la conservación de la cantidad de movimiento angular

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$$\left[I_f = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right]\omega_0$$

$$= \left[I_f = \frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{R}{4}\right)^2\right]\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + m\frac{R^2}{16}}\omega_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{M}{2} + m}{\frac{M}{2} + \frac{m}{16}}\right)\omega_0$$

b)

$$K_i = \frac{1}{2}I_i\omega_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_0^2$$

$$= \frac{1}{4}(M + 2m)R^2\omega_0^2$$

$$K_f = \frac{1}{2}I_f\omega_f^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{R}{4}\right)^2\right]\omega_f^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{R}{4}\right)^2\right]\left(\frac{M/2 + m}{M/2 + m/16}\right)^2\omega_0^2$$

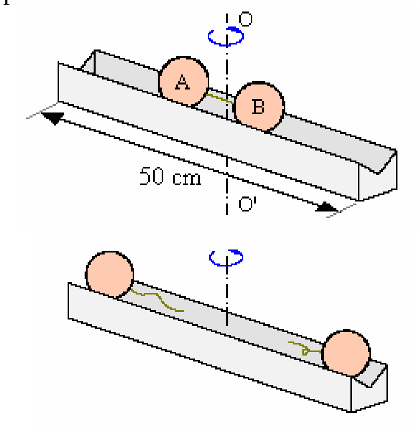
$$= \frac{1}{4}\left(M + \frac{m}{8}\right)\left(\frac{M + 2m}{M + m/8}\right)^2 R^2\omega_0^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{M + 2m}{M + m/8}\right)(M + 2m)R^2\omega_0^2$$

Como $\left(\frac{M + 2m}{M + m/8}\right) > 1$

La energía rotacional aumenta.

Ejemplo 76. La barra horizontal de la figura tiene un momento de inercia respecto al eje de rotación de 5x10^{-3} kg m^2, y cada una de las bolas que pueden deslizar sobre ella pesan 50 g y se consideran de dimensiones despreciables. El conjunto está girando libremente alrededor del eje O-O' con las bolas dispuestas simétricamente respecto al eje y sujetas por un hilo AB de 20 cm. Si se rompe el hilo cuando el conjunto gira a 20 rad/s, determinar la nueva velocidad angular cuando las bolas lleguen a los topes del extremo de la barra.



Solución.

Empecemos calculando el momento de inercia del conjunto, cuando las bolas están separadas 20 cm.

$I_1 = I_{barra} + I_{bolas} = I_{barra} + 2\, m\, r_1^2 = 5\text{x}10^{-3}$ kg m^2 + $0{,}1\text{x}0{,}1^2 = 6\text{x}10^{-3}$ kg m^2

Cuando se alejen hasta los topes:

$I_2 = I_{barra} + I_{bolas} = I_{barra} + 2\, m\, r_2^2$

$= 5\text{x}10^{-3}$ kg m^2 + $0{,}1\text{x}0{,}25^2$

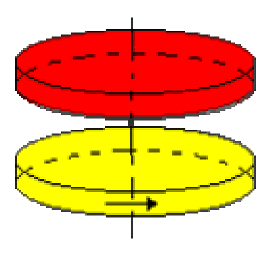
$= 11{,}25\text{x}10^{-3}$ kg m^2

La rotura del hilo libera fuerzas exclusivamente internas, por lo que se conservará la cantidad de movimiento angular del sistema:

$$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = L_2\omega_2 \Rightarrow$$

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{6}{11{,}25}20 = 10{,}67 \text{ rad / s}$$

Ejemplo 77. Un disco de 2 kg de masa y 10 cm de radio gira alrededor de su eje a 180 r.p.m.. Encima, pero sin que exista contacto, se encuentra otro disco de 1 kg de masa, del mismo radio y en reposo. Cuando el disco superior se deja caer, ambos se mueven solidariamente. Calcular la velocidad angular final.



Solución.

Cuando el disco superior se posa sobre el inferior, el torque de las fuerzas sigue siendo nulo por lo que se conserva la cantidad de movimiento angular, $I\omega$.

$$(I\omega)_{\text{Antes}} = (I\omega)_{\text{Después}}$$

$$I_1\omega_i = (I_1 + I_2)\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_i$$

Como el Momento de inercia de un disco es ½.$m.R^2$ se obtiene:

$$\omega_f = \frac{\frac{1}{2}m_1R^2}{\left(\frac{1}{2}m_1R^2 + \frac{1}{2}m_2R^2\right)}\omega_i = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}\omega_i$$

En este caso particular:

$$\omega_f = \frac{2}{(2+1)}180 = 120 \text{ rpm.}$$

GIROSCOPOS Y TROMPOS - MOVIMIENTO DE PRECESION

El giróscopo es una rueda montada en rodamientos sin fricción, en tal forma que la rueda tiene libertad de rotar en cualquier dirección con respecto al marco que lo sujeta.

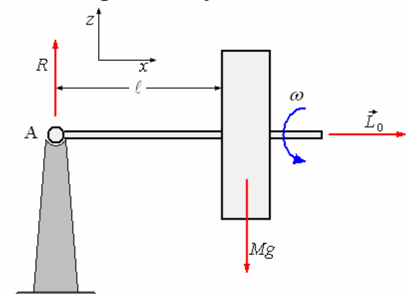
Para lograr esto se necesitan tres gímbalos (correspondientes a los tres espacios dimensionales). Como los rodamientos no tienen fricción no se ejercen torques sobre la rueda. Esto significa que una vez iniciado el giro, el eje de rotación permanecerá fijo no importando que movimiento se de al mareo exterior. La dirección en el espacio del eje no variará.

Hasta ahora vimos el movimiento rotacional en que el eje de rotación está fijo, o tiene movimiento de traslación sin cambio en su dirección. La mayoría de los movimientos rotacionales quedan en estas categorías, pero en el caso de un trompo o giróscopo en rotación no se cumple lo anterior. Si se hace girar rápidamente el rotor de este aparato y luego se coloca un extremo libre del eje de rotación sobre un soporte fijo, como se muestra en la figura. El giróscopo no caerá del soporte sino que se mantiene en posición casi horizontal mientras que el eje de su rotor gira lentamente en un plano horizontal, esta rotación lenta del eje se conoce como PRECESION.



Veamos como se origina la precesión.

Consideremos un giróscopo simplificado mostrado en la figura siguiente, un disco cilíndrico muy macizo de masa M y radio a que tiene libertad para girar sin fricción en torno a una varilla muy ligera y delgada, a lo largo de su eje.



Un extremo de la varilla se apoya en A. que está a una distancia ℓ del disco. Si se mantiene la varilla

horizontal, y se hace girar al disco con una velocidad angular ω en torno a su eje y luego, se suelta.
Como actúan dos únicas fuerzas el peso *Mg* y la reacción del apoyo *R*, podría pensarse que el disco caería. Si $\vec{L}_0$ fuera cero sucedería esto, pero el torque que produce *Mg* es:

$$\vec{\tau} = \left(\ell\hat{i}\right)\times\left(-Mg\hat{k}\right) = Mg\ell\hat{j}$$

este torque produce un cambio en la cantidad de movimiento angular

$$d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt = \left(Mg\ell\hat{j}\right)dt$$

la magnitud. de este cambio es:

$$dL = Mg\ell dt$$

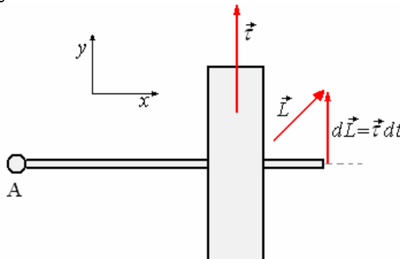
Por otra parte: $dL = L_0 d\theta$

De aquí $Mg\ell dt = L_0 d\theta$ y $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{Mg\ell}{L_0}$

Como $L_0 = L_0\omega = \dfrac{1}{2}Ma^2\omega$;

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{Mg\ell}{\frac{1}{2}Ma^2\omega} = \frac{2g\ell}{a^2\omega}$$

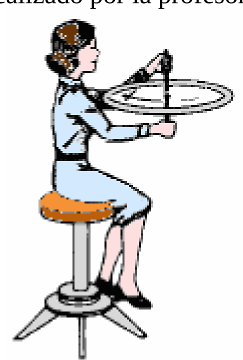
Por consiguiente el disco no caerá, en lugar de ello girará en el plano horizontal *xy* (ver la figura siguiente) en torno al eje vertical a través del punto de apoyo A.



La velocidad angular de esta precesión es:

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\tau}{I\omega} = \frac{2g\ell}{\omega a^2}$$

Ejemplo 78. Una profesora de física se encuentra sentada en una silla giratoria manteniendo en sus manos una rueda de bicicleta como se indica en la figura. El momento de inercia de la rueda respecto a su eje es de 0,2 kg m^2, y el momento de inercia de la profesora más la rueda respecto del eje de la silla es de 2,7 kg m^2. La velocidad angular inicial de la rueda es de 55 rad/s en sentido antihorario. En un momento dado la profesora gira 180º el eje de la rueda pasando a girar con -55 rad/s en sentido contrario al anterior. Calcular:
a) La velocidad angular adquirida por la silla y el sentido de giro.
b) El trabajo realizado por la profesora.



Solución.
a) Dado que no hay momentos externos sobre la silla giratoria podemos considerar que el momento angular no varía.

$$L_1 = I_{\text{RUEDA}}\,\omega_1,$$
$$L_2 = I_{\text{RUEDA}}\left(-\omega_1\right) + I_{\text{SILLA}}\,\omega_2$$
$$I_{\text{RUEDA}}\,\omega_1 = I_{\text{RUEDA}}\left(-\omega_1\right) + I_{\text{SILLA}}\,\omega_2$$
$$\Rightarrow\ \omega_2 = \frac{2I_{\text{RUEDA}}}{I_{\text{SILLA}}}\omega_1$$
$$\omega_2 = \frac{2(0{,}02)}{2{,}7}55 = 8{,}15\ \text{rad/s}$$

(Positivo, por tanto en el sentido de rotación inicial de la rueda)
b)

$$W = \Delta E = E_2 - E_1$$
$$= \frac{1}{2}I_{\text{SILLA}}\,\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_{\text{RUEDA}}\left(-\omega_1\right)^2 - \frac{1}{2}I_{\text{RUEDA}}\,\omega_1^{\ 2}$$
$$= \frac{1}{2}I_{\text{SILLA}}\,\omega_2^2 = 89{,}6\ \text{J}$$

El trabajo es por tanto la energía adquirida por la silla, ya que la energía de la rueda no varía.

Dicho trabajo, positivo, es producido por la fuerza muscular (interna) de la profesora.

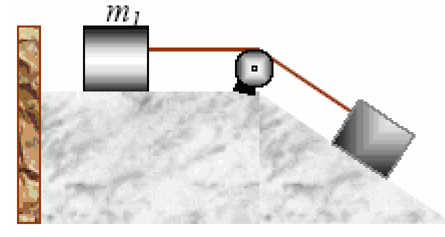
PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. El centro de masa de una pelota de radio *R*, se mueve a una rapidez *v*. La pelota gira en torno a un eje que pasa por su centro de masa con una rapidez angular ω. Calcule la razón entre la energía rotacional y la energía cinética de traslación. Considere la pelota una esfera uniforme.

2. Un volante en la forma de un cilindro sólido de radio *R* = 0,6 m y masa *M* = 15 kg puede llevarse

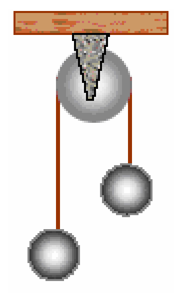
hasta una velocidad angular de 12 rad/s en 0,6 s por medio de un motor que ejerce un torque constante. Después de que el motor se apaga, el volante efectúa 20 rev antes de detenerse por causa de la fricción (supuesta constante). ¿Qué porcentaje de la potencia generada por el motor se emplea para vencer la fricción?
Respuesta. 2.8%.

3. Un bloque de masa m_1 y uno de masa m_2 se conectan por medio de una cuerda sin masa que pasa por una polea en forma de disco de radio R**,** momento de inercia I y masa M. Así mismo, se deja que los bloques se muevan sobre una superficie en forma de cuña con un ángulo θ como muestra la figura. El coeficiente de fricción cinético es μ para ambos bloques. Determine
a) la aceleración de los dos bloques y
b) la tensión en cada cuerda.

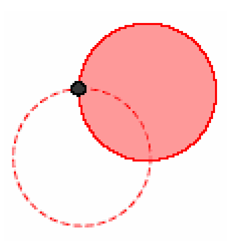


Respuesta.
a) $(m_2 \text{sen}\, \theta - \mu)(m_1 + m_2 \cos \theta)g/(m_1 + m_2 + M)$,
b) $T_1 = \mu m_2 g + m_1 a$, $T_2 = T_1 + ½Ma$.

4. Una masa m_1 y una masa m_2 están suspendidas por una polea que tiene un radio R y una masa m_3. La cuerda tiene un masa despreciable y hace que la polea gire sin deslizar y sin fricción. Las masas empiezan a moverse desde el reposo cuando están separadas por una distancia D. Trate a la polea como un disco uniforme, y determine las velocidades de las dos masas cuando pasan una frente a la otra.



5. Un disco sólido uniforme de radio R y masa M puede girar libremente sobre un pivote sin fricción que pasa por un punto sobre su borde.
Si el disco se libera desde el reposo en la posición mostrada por el círculo.
a) ¿Cuál es la rapidez de su centro de masa cuando el disco alcanza la posición indicada en el círculo punteado?
b) ¿Cuál es la rapidez del punto más bajo sobre el disco en la posición de la circunferencia punteada?
c) Repetir para un aro uniforme

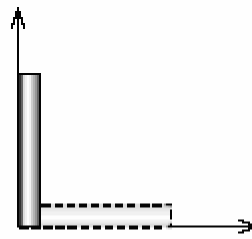


Respuesta. a) $2(Rg/3)^{½}$, b) $4(Rg/3)^{½}$, c) $(Rg)^{½}$.

6. Un peso de 50 N se une al extremo libre de una cuerda ligera enrollada alrededor de una pelota de 0,25 m de radio y 3 kg de masa. La polea puede girar libremente en un plano vertical en torno al eje horizontal que pasa por su centro. El peso se libera 6 m sobre el piso.
a) calcular la tensión de la cuerda, la aceleración de la masa y la velocidad con la cual el peso golpea el piso.
b) Calcular la rapidez con el principio de la conservación de la energía.
Respuesta. a) 11,4N, 7,6 m/s^2, 9,5 m/s, b) 9,5 m/s.

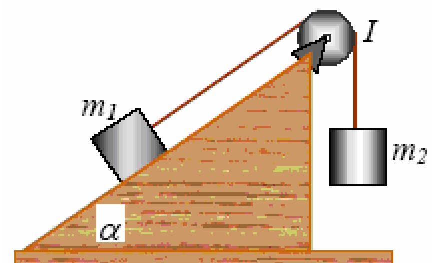
7. Una ligera cuerda de nylon de 4 m está enrollada en un carrete cilíndrico uniforme de 0,5 m de radio y 1 kg de masa. El carrete está montado sobre un eje sin fricción y se encuentra inicialmente en reposo. La cuerda se tira del carrete con una aceleración constante de 2,5 m/s^2. a) ¿Cuánto trabajo se ha efectuado sobre el carrete cuando éste alcanza una velocidad angular de 8 rad/s?
b) Suponiendo que no hay la suficiente cuerda sobre el carrete, ¿Cuánto tarda éste en alcanzar esta velocidad angular?
c) ¿Hay suficiente cuerda sobre el carrete?
Respuesta. a) 4 J, 1,6 s, c) sí.

8. Una barra uniforme de longitud L y masa M gira alrededor de un eje horizontal sin fricción que pasa por uno de sus extremos. La barra se suelta desde el reposo en una posición vertical. En el instante en que está horizontal, encuentre
a) su rapidez angular,
b) la magnitud de su aceleración angular,
c) las componentes x e y de la aceleración de su centro de masa, y
d) las componentes de la fuerza de reacción en el eje.
Respuesta. a) $(3g/L)^{½}$, b) $3g/2L$,
c) $-(3/2\hat{i} + ¾\hat{j})g$, d) $(-3/2\hat{i} + ¼\,\hat{j})Mg$.



9. Los bloques mostrados en la figura están unidos entre si por una polea de radio R y momento de inercia I. El bloque sobre la pendiente sin fricción

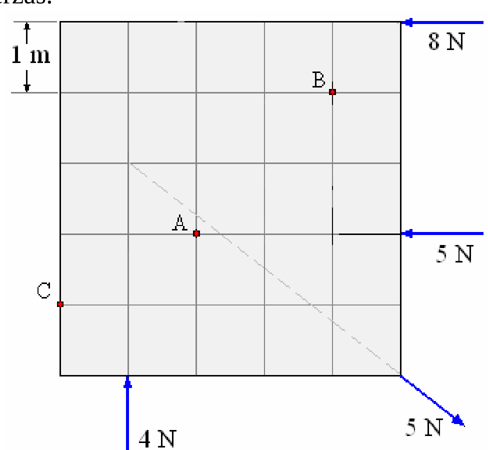
se mueve hacia arriba con una aceleración constante de magnitud a.
a) Determine las tensiones en las dos partes de la cuerda,
b) encuentre el momento de inercia de polea.



Respuesta. a) $T_1 = m_1(a + g\operatorname{sen}\theta)$,
$T_2 = m_2(g - a)$

b) $m_2R^2\frac{g}{a} - m_1R^2 - m_2R^2 - m_1R^2\frac{g}{a}\operatorname{sen}\theta$

10. Un cuerpo plano está sometido a cuatro fuerzas como se indica en la figura.
a) Hallar el módulo y dirección del torque actuante respecto a un eje perpendicular al plano y que pasa por el punto A.
b) Respecto a un eje que pasa por el punto B.
e) Respecto a un eje que pasa por el punto C.
d) Determinar la fuerza equivalente y su línea de acción.
e) Sustituir esta fuerza por otra que esté aplicada en A y un par de fuerzas o cupla aplicadas en los puntos B y C y hallar el valor mínimo de estas fuerzas.

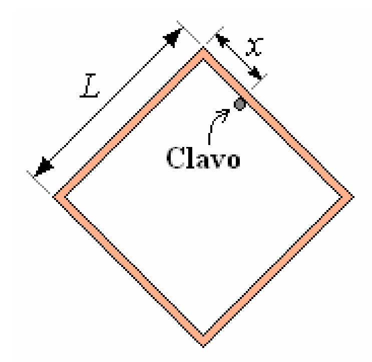


Respuesta.
a) τ = 23 Nm, b) τ = 23 Nm, c) τ = 24 Nm,

d) $\vec{F} = \hat{i} + \hat{j}$, $y = x - 23$,

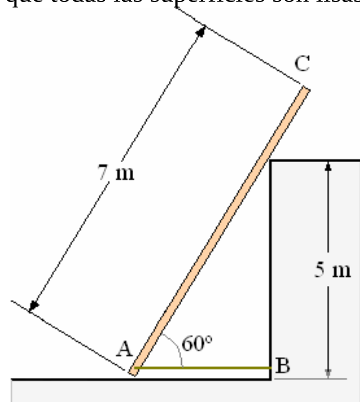
e) $\vec{F}_B = \frac{23}{25}\left(-3\hat{i} + 4\hat{j}\right) = -\vec{F}_C$

11. Un marco cuadrado de lado L. Se cuelga de un clavo rugoso de coeficiente de rozamiento estático μ_s. ¿A qué distancia del vértice está clavado si el marco está a punto de deslizar?



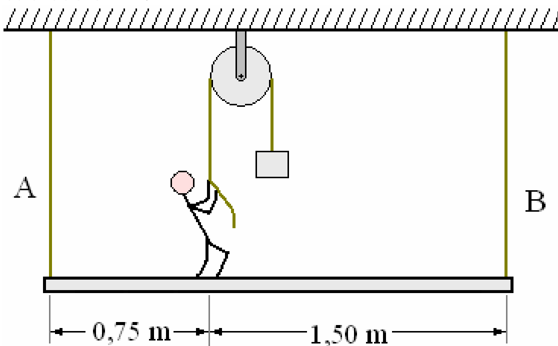
Respuesta. $x = \frac{L}{2}(1 - \mu_s)$

12. Determinar la tensión en el cable AB que Impide que el poste BC deslice. En la figura se ven los datos esenciales. La masa del poste es de 18 kg. Suponer que todas las superficies son lisas.



Respuesta. T = 46,2 N

13. Un hombre de 70 kg, sostiene un objeto de 31,9 kg. Como se indica en la figura. La polea carece de rozamiento. La plataforma sobre la que está situado el hombre está colgada mediante dos cuerdas en A y otras dos en B. ¿Cuál e tensión de una de las cuerdas en A?

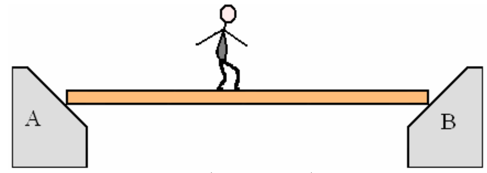


Respuesta. 124,5 N

14. Reemplace la fuerza de 1000 N de la figura por una fuerza que pasa por A y una cupla cuyas fuerzas actúan verticalmente a través de B C.

Respuesta. $\vec{F}_A = 800\hat{i} + 600\hat{j}$, $\vec{F}_B = 467\hat{j}$,
$\vec{F}_C = -467\hat{j}$

15. Un hombre de 60 kg que camina a 2 m/s atraviesa un tabla de 30 kg y 10 m de largó
a) ¿Cuál es la fuerza sobre el soporte B en función d tiempo?
b) Si la máxima fuerza que puede resistir B es 490 ¿Cuándo y dónde caerá al río el hombre?
Considerar que el peso del hombre siempre actúa en dirección de la vertical que pasa por su centro de masa.



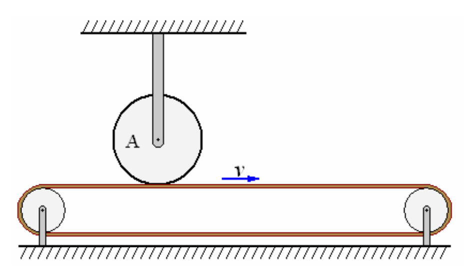
Respuesta: a) $F_B = (12t + 15)9{,}8$ N, b) t = 2,92 s, x = 5,83 m de A.

16. Un hombre de masa m quiere subir por una escalera. La escalera tiene masa M, largo L y forma un ángulo θ con e piso. El coeficiente de fricción entre la escalera y e peso es μ, mientras que la pared no tiene fricción.
a)¿A qué altura de la escalera puede llegar antes que comience a resbalar?
b) ¿Si el ángulo θ es el mayor sin que la escalera sola puede estar sin resbalar, cuál es la altura a la que puede llegar el hombre?
Respuesta. a)

$$\left[(m+M)\mu L \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}ML\cos\theta\right]\mu M\cos\theta$$

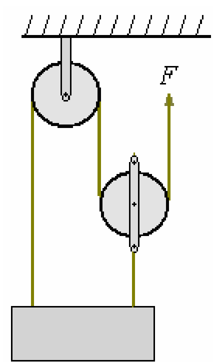
b) $L/2\mu$

17. El disco A tiene una masa de 2 kg y un radio de 7,5 cm, se coloca en contacto con una correa que se mueve con una velocidad v = 15 m/s. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre el disco y la correa es 0,2, calcular tiempo necesario para que el disco alcance una velocidad angular constante.



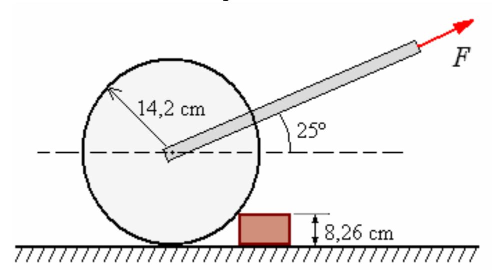
Respuesta. 3,82 s

18. Si se aplica La fuerza F a una cuerda ligera atada a un bloque con el sistema de poleas mostrado en la figura. ¿Cuál es el máximo peso que puede levantar?



Respuesta. 3F

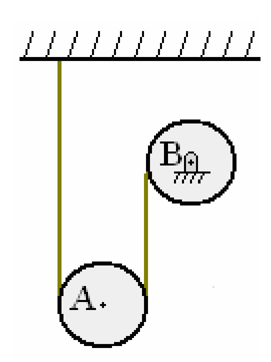
19. El rodillo que se ve en la figura tiene una masa de 339 kg ¿Que fuerza F es necesaria para subir el rodillo sobre el bloque?



Respuesta. F =3949,4 N

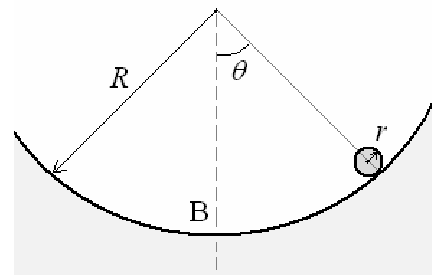
20. La línea de acción de una fuerza de 1N está en el plano xz y corta el eje z en un punto que dista 0,6 m del origen.
a) ¿Cuál es el torque respecto al eje y si el ángulo comprendido entre la dirección de la fuerza y el eje z es 60º?
b) ¿Si el ángulo e l80º?
c) ¿Si el ángu1o es 330º?
Respuesta. a) τ = 0,52 N m , b) τ = 0
c) τ = - 0,3 N m

21. Dos discos de masa 10 kg y radio R = 0,3 m cada uno están conectados mediante una cuerda. En el instante mostrado en la figura, la velocidad angular del disco B es de 20 rad/s en sentido horario. Calcular cuánto sube el disco A cuando la velocidad angular del disco B sea de 4 rad/s.



Respuesta. 1,54 m

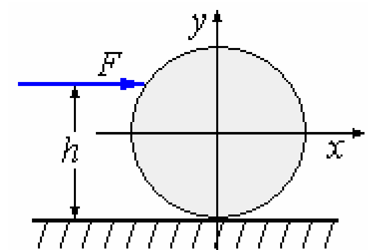
22. Un cilindro de masa ni y radio r rueda sin deslizar sobre la cara interior de una superficie cilíndrica de radio *R*. Sabiendo que la esfera parte del raposo en la posición indicada en la figura, obtener:
a) La velocidad de la esfera al paso por B.
b) El módulo de la reacción normal en cada instante.



Respuesta. a) $\sqrt{\frac{4}{3}g(R-r)(1-\cos\theta)}$,

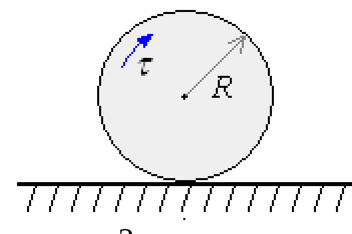
b) $\frac{mg}{3}(7-4\cos\theta)$

23. ¿A que altura sobre la mesa debe golpearse una bola de billar con un taco mantenido horizontalmente para que la bola comience su movimiento sin rozamiento entre ella y la mesa?



Respuesta. 7/5*R*

24. Un cilindro homogéneo de masa m y radio R descansa sobre un plano horizontal. Se aplica un torque, según se indica en la figura. Hallar el valor del coeficiente de rozamiento entre la rueda y el plano para que aparezca rodadura pura.



Respuesta. $\mu \geq \frac{2\tau}{3mgR}$

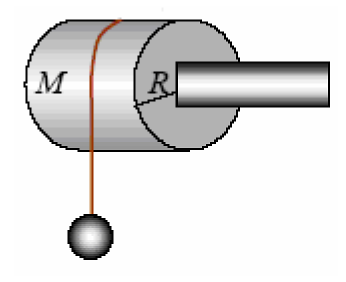
25. Una esfera de l00 kg de masa y 0,6 m de diámetro baja rodando, partiendo del reposo, por un plano inclinado 25º. recorriendo 30 m..
a) ¿Cuál es su energía cinética al cabo de los 30 m?
b) ¿Cuál es la velocidad de su centro de masa?
Respuesta. a) 1268 kg m, b) 13,3 m/s

26. Un pasajero viaja de pie en un ómnibus. El ómnibus se mueve con una velocidad de 50 km/h cuando el conductor aplica los frenos. El ómnibus desacelera de modo uniforme durante una distancia de 15 ni hasta detenerse. ¿Qué ángulo respecto a la vertical deberá inclinarse el pasajero para evitar su caída?
Respuesta. 33,27 hacia atrás.

27. a) ¿Cómo podría distinguirse una esfera de oro de otra de plata si ambas tuviesen el mismo peso, el mismo radio y las dos estuvieron pintadas del mismo color?
b) ¿Cómo podría distinguir un huevo duro de uno fresco si estuvieran juntos?

28. Un carrete cilíndrico hueco y uniforme tiene radio interior *R/2*, radio exterior *R* y masa *M* . Está montado de manera que gira sobre un eje horizontal fijo. Una masa *m* se conecta al extremo de una cuerda enrollada alrededor del carrete. La masa *m* desciende a partir del reposo una distancia *y* durante un tiempo *t*. Demuestre que el torque debido a la fuerza de roce entre el carrete y el eje es:

$$\tau = R\left[m\left(g-2\frac{y}{t^2}\right)-\frac{5}{4}M\frac{y}{t^2}\right]$$



29. Un cilindro de 10 kg de masa rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal.
En el instante en que se su centro de masa tiene una rapidez de 10 m/s, determine:
a) la energía cinética traslacional de su centro de masa,

b) la energía rotacional de su centro de masa, y c) su energía total.
Respuesta. a) 500 J, b) 250 J, c) 750 J.

30. Una esfera sólida tiene un radio de 0,2 m y una masa de 150 kg. ¿Cuánto trabajo se necesita para lograr que la esfera ruede con una rapidez angular de 50 rad/s sobre una superficie horizontal? (Suponga que la esfera parte del reposo y rueda sin deslizar).

31. Un disco sólido uniforme y un aro uniforme se colocan uno frente al otro en la parte superior de una pendiente de altura *h*. Si se sueltan ambos desde el reposo y ruedan sin deslizar, determine sus rapideces cuando alcanzan el pie de la pendiente ¿Qué objeto llega primero a la parte inferior?

32. Una bola de boliche tiene una masa *M*, radio *R* y un momento de inercia de $(2/5)MR^2$. Si rueda por la pista sin deslizar a una rapidez lineal *v*, ¿Cuál es su energía total de función de *M* y *v*?
Respuesta. $0,7Mv^2$.

33. Un anillo de 2,4 kg de masa de radio interior de 6 cm y radio exterior de 8 cm sube rodando (sin deslizar) por un plano inclinado que forma un ángulo de $\theta = 37°$ con la horizontal. En el momento en que el anillo ha recorrido una distancia de 2 m al ascender por el plano su rapidez es de 2,8 m/s.
El anillo continua ascendiendo por el plano cierta distancia adicional y después rueda hacia abajo. Suponiendo que el plano es lo suficientemente largo de manera que el anillo no ruede fuera en la parte superior, ¿qué tan arriba puede llegar?

34. Una barra rígida ligera de longitud *D* gira en el plano *xy* alrededor de un pivote que pasa por el centro de la barra. Dos partículas de masas m_1 y m_2 se conectan a sus extremos. Determine la cantidad de movimiento angular del sistema alrededor del centro de la barra en el instante en que la rapidez de cada partícula es *v*.
Respuesta. $½(m_1 + m_2)vD$.

35. Un péndulo cónico consta de masa *M* que se mueve en una trayectoria circular en un plano horizontal. Durante el movimiento la cuerda de longitud *L* mantiene un ángulo constante con la θ vertical. Muestre que la magnitud de la cantidad de movimiento angular de la masa respecto del punto de soporte es:

$$L = \sqrt{\frac{gM^2L^3\text{sen}^4\theta}{\cos\theta}}$$

36. Una partícula de masa *m* se dispara con una rapidez *vo* formando un ángulo θ con la horizontal. Determine la cantidad de movimiento angular de la partícula respecto del origen cuando ésta se encuentra en:
a) el origen,
b) el punto más alto de su trayectoria,
c) justo antes de chocar con el suelo.

Respuesta. a) 0, b) $-\frac{mv_0^3}{2g}\text{sen}^2\theta\cos\theta$,

c) $-\frac{2mv_0^3}{g}\text{sen}^2\theta\cos\theta$

37. Un disco sólido uniforme de masa *M* y radio *R* gira alrededor de un eje fijo perpendicular su cara. Si la rapidez angular es ω, calcular la cantidad de movimiento angular del disco cuando el eje de rotación
a) pasa por su centro de masa, y
b) pasa por un punto a la mitad entre el centro y el borde.

38. Una partícula de 0,4 kg de masa se une a la marca de 100 cm de una regla de 0,1 kg de masa. La regla gira sobre una mesa horizontal sin fricción con una velocidad angular de 4 rad/s. Calcular la cantidad de movimiento angular del sistema cuando la regla se articula en torno de un eje,
a) perpendicular a la mesa y que pasa por la marca de 50 cm,
b) perpendicular a la mesa y que pasa por la marca de 0 cm.
Respuesta. a) 0,43 kgm^2/s, b) 1,7 kgm^2/s.

39. Una mujer de 60 kg que está parada en el borde de una mesa giratoria horizontal que tiene un momento de inercia de 500 kg·m2 y un radio de 2 m. La mesa giratoria al principio está en reposo y tiene libertad de girar alrededor de un eje vertical sin fricción que pasa por su centro. La mujer empieza a caminar alrededor de la orilla en sentido horario (cuando se observa desde arriba del sistema) a una rapidez constante de 1,5 m/s en relación con la Tierra.
a) ¿En qué dirección y con qué rapidez angular gira la mesa giratoria
b) ¿Cuánto trabajo realiza la mujer para poner en movimiento la mesa giratoria?
Respuesta. a) 0,36 rad/s, antihorario.

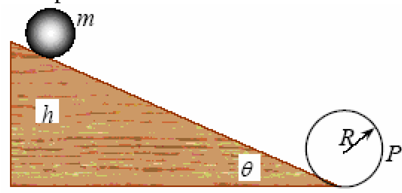
40. Una barra uniforme de masa *M* y longitud *d* gira en un plano horizontal en torno de un eje vertical fijo sin fricción que pasa por su centro. Dos pequeñas cuentas, cada una de masa *m*, se montan sobre la barra de manera tal que pueden deslizar sin fricción a lo largo de su longitud. Al principio las cuentas se fijan por medio de retenes ubicados en las posiciones *x* (donde $x < d/2$) a cada lado del centro, tiempo durante el cual el sistema gira una rapidez angular ω. Repentinamente, los retenes se quitan y las pequeñas cuentas se deslizan saliendo de la barra. Encuentre,
a) la rapidez angular del sistema en el instante en que las cuentas alcanzan los extremos de la barra, y

b) la rapidez angular de la barra después de que las cuentan han salido de ella.

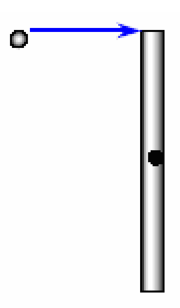
41. Un bloque de madera de masa M que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción está unido a una barra rígida de longitud ℓ y masa despreciable. La barra gira alrededor de un pivote en el otro extremo. Una bala de masa m que se desplaza paralela a la superficie horizontal y normal a la barra con rapidez v golpea el bloque y queda incrustada en él.
a) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del sistema bala-bloque?
b) ¿Qué fracción de la energía cinética original se pierde en la colisión?
Respuesta. a) $mv\ell$, b) $M/(M+m)$.

42. Una cuerda se enrolla alrededor de un disco uniforme de radio R y masa M. El disco se suelta desde el reposo con la cuerda vertical y su extremo superior amarrado a un soporte fijo. A medida que el disco desciende, demuestre que
a) la tensión en la cuerda es un tercio del peso del disco.
b) La magnitud de la aceleración del centro de masa es $2g/3$, y
c) la rapidez del centro de masa es $(4gh/3)^{½}$.
Verifique su respuesta a la pregunta c) utilizando métodos de energía.

43. Una pequeña esfera sólida de masa m y de radio r rueda sin deslizar a lo largo de la pista mostrada en la figura. Si parte del reposo en la parte superior de la pista a una altura h, donde h es grande comparada con r
a) Cuál es el valor mínimo de h (en función de R) de modo que la esfera complete la trayectoria?
b) ¿Cuáles son las componentes de fuerza de la esfera en el punto P si $h = 3R$?

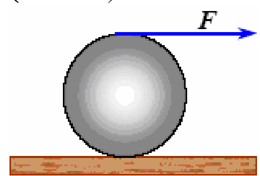


44. Un proyectil de masa m se mueve a la derecha con rapidez v_0. El proyectil golpea y queda fijo en extremo de una barra estacionaria de masa M y longitud D que está articulada alrededor de un eje sin fricción que pasa por su centro.
a) Encuentre la rapidez angular del sistema justo después de la colisión.
b) Determine la pérdida fraccionaria de energía mecánica debida a la colisión.

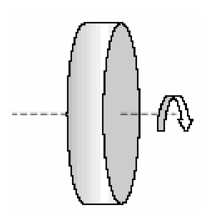


45. A una bola de boliche se le da una rapidez inicial v_o en una canal de manera tal que inicialmente se desliza sin rodar. El coeficiente de fricción entre la bola y la canal es μ. Demuestre que durante el tiempo en que ocurre el movimiento de rodamiento puro,
a) la rapidez del centro de masa de la bola es $5v_o/7$, y
b) la distancia que recorre es $12\ v_o^2/49\ \mu g$.
(Sugerencia: Cuando ocurre el movimiento de rodamiento puro, $v_{cm} = R\omega$. Puesto que la fuerza de fricción proporciona la desaceleración, a partir de la segunda ley de Newton se concluye que $a_{cm} = \mu g$.)

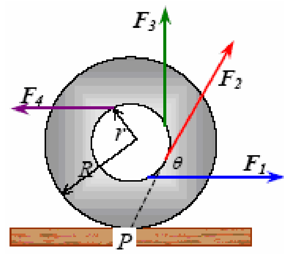
46. El alambre de un carrete de masa M y radio R se desenrolla con una fuerza constante F. Suponiendo que el carrete es un cilindro sólido uniforme que no desliza, muestre que, a) la aceleración del centro de masa es $4F/3M$, y
b) la fuerza de fricción es hacia la derecha y su magnitud es igual a $F/3$.
c) Si el cilindro parte del reposo y rueda sin deslizar, ¿Cuál es la rapidez de su centro de masa después que ha rodado una distancia D?
Respuesta. c) $(8FD/3M)^{½}$.



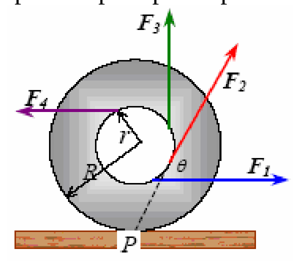
47. Suponga un disco sólido de radio R al cual se le da una rapidez angular ω_o alrededor de un eje que pasa por su centro y después se baja hasta una superficie horizontal y se suelta, como en la. Suponga también que el coeficiente de fricción entre el disco y la superficie es μ.
a) Calcular la rapidez angular del disco una vez que ocurre el rodamiento puro.
b) Calcular la pérdida fraccionaria de energía cinética desde el momento en que el disco se suelta hasta que ocurre el rodamiento puro
c) Muestre que el tiempo que tarda en ocurrir el movimiento de rodamiento puro es $R\ \omega_o/3\ \mu\ g$.
d) Muestre que el tiempo que recorre el disco antes de que ocurra el rodamiento puro es $R^2\ \omega_o{}^2/18\ \mu\ g$.



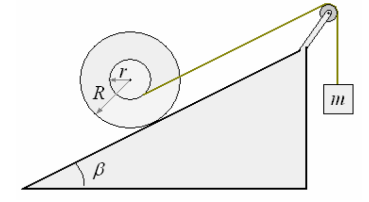
48. La figura muestra un carrete de alambre que descansa sobre una superficie horizontal. Cuando se tira, no se desliza en el punto de contacto P. El carrete se tira en las direcciones indicadas por medio de los vectores F_1, F_2, F_3 y F_4. Para cada fuerza determine la dirección en que rueda el carrete. Advierta que la línea de acción de F_2 pasa por P.



49. El carrete mostrado en la figura tiene un radio interior r y un radio externo R. El ángulo θ entre la fuerza aplicada y la horizontal puede variar. Demuestre que el ángulo crítico para el cual el carrete no rueda y permanece estacionario está dado por $\cos\theta = r/R$.
(Sugerencia: En el ángulo crítico la línea de acción de la fuerza aplicada pasa por el punto de contacto.)

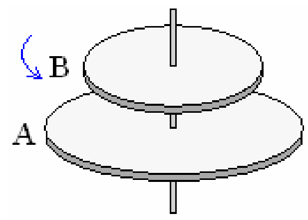


50. Se tiene un carrete sobre un plano inclinado, el cual tiene enrollado un hilo delgado y su extremo libre sujeta una masa m por medio de una polea sin fricción y masa despreciables. Se asume que la masa del carrete M está distribuida uniformemente en un círculo de radio R. Determinar el ángulo de inclinación β al cuál el centro de gravedad del carrete estará en reposo.



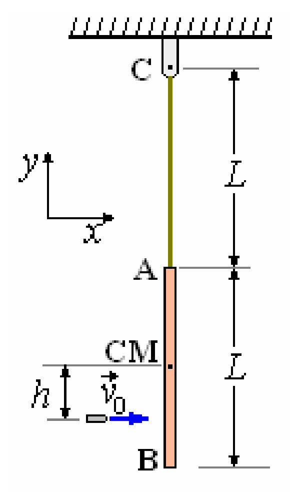
Respuesta. $\beta = \text{sen}^{-1}\dfrac{1}{\left(\dfrac{M}{m}+\dfrac{r^2}{R^2}\right)}$. Estará en reposo solo si $\left(\dfrac{M}{m}+\dfrac{r^2}{R^2}\right) \geq 1$

51. Los discos A y B son del mismo material y tienen el mismo espesor, pudiendo girar 1ibemente alrededor de un eje vertical. El disco B se encuentra en reposo cuando se deja caer sobre el disco A. el está girando con una velocidad angular de 400 rpm. Sabiendo que la masa del disco A es de 4 kg, calcular:
a) La velocidad angular final de los discos.
b) La variación de la energía cinética experimentada por el sistema.
$R_A = 0{,}1$ m, $R_B = 0{,}15$ m,



Respuesta. a) 334 rpm, .b).- 6,51 J

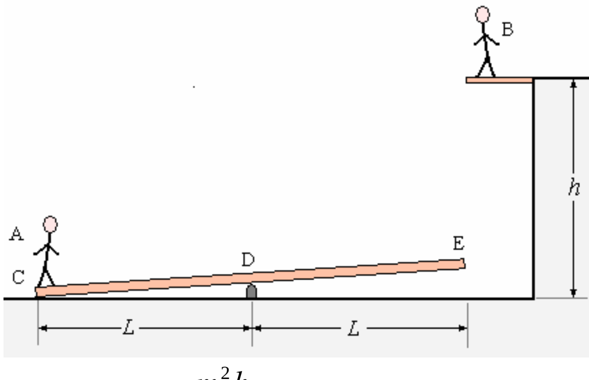
52. Una bala de 3g se dispara, con una velocidad horizontal de 550 m/s, contra. Una varilla de madera AB de longitud L = 0,750 m. La varilla que inicialmente está en reposo, se encuentra suspendida de una cuerda de longitud L = 0,750 m. Sabiendo que h = 0,150 m, calcular las velocidades de cada uno de los extremos de la varilla inmediatamente después de que la bala se haya incrustado.



Respuesta. $\vec{v}_A = -0{,}566\hat{i}$, $\vec{v}_B = 6{,}22\hat{i}$

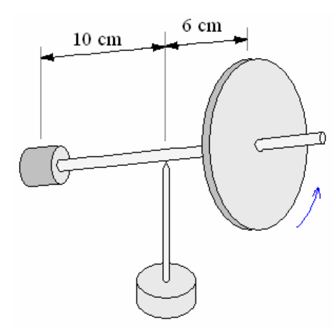
53. Un tablón masa M se apoya sobre un pequeño pivote D. Un gimnasta A de masa m está de pie sobre el extremo C del tablón, un segundo gimnasta B de la misma masa m salta desde la altura h y cae

sobre el tablón en E. Suponiendo que este choque es perfectamente inelástico, determinar la altura que alcanzará el gimnasta A. (El gimnasta A permanece de pie completamente rígido).



Respuesta. $\dfrac{m^2 h}{\left(2m + M/3\right)^2}$

54. Un disco macizo de 1,2 kg de masa y 10 cm de diámetro está montado en un extremo de un eje de masa despreciable que está pivotado alrededor de un punto a 6 cm del, centro del disco en el otro extremo del eje, a una distancia de 10 cm del pivote, se cuelga un objeto de 0,96 kg de masa. Si la velocidad angular de giro del disco es 37,37 rad/s. ¿Cuál es la velocidad de precesión?



Respuesta. Ω = 2,1 rad/s

55. Una rueda de bicicleta de 82 cm de diámetro tiene una platina de acero enrollada en su parte exterior de modo que la masa resultante del sistema puede suponerse que está situada toda ella en la periferia de la rueda, siendo M = 7,3 kg sosteniendo los dos extremos del eje con las manos en la posición horizontal. El eje sobresale 15,2 cm a cada lado de la rueda. Mientras la rueda está girando con una velocidad angular de 25,12 rad/s se hace girar el eje con las manos en un plano horizontal alrededor de su centro. Calcular el valor y dirección de la fuerza que deberá ejercer en cada mano para producir una velocidad angular de precesión de 0,628 rad/s alrededor del centro.
Respuesta. un par de fuerzas de 64,6 N aplicadas en cada extremo del eje.